Вісник Національного технічного університету "ХПІ", 2018, № 42 (1318)
ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

УДК 517.956.6 DOI: 10.20998/2411-0558.2018.42.01

А. А. АБДУЛЛАЕВ, асс., ТИИИМСХ, Ташкент,
Н. М. САФАРБАЕВА, ст. преп., ТИИИМСХ, Ташкент

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Стационарные процессы различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия, электростатика и т.д.) описываются уравнениями эллиптического типа. В частности, в некоторых моделях, таких как гидро и газовой динамики рассматриваются эллиптические уравнения. В данной работе изучается нелокальная краевая задача с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, т.е. для уравнения, где линия вырождения является характеристикой. Библиогр.: 8 назв.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача; условия Пуанкаре; уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода.

Постановка проблемы. Уравнения смешанного типа благодаря приложениям при решении многих важных вопросов прикладного характера в газовой динамике, магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеивания, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в прогнозировании уровня грунтовых вод являются одними из основных направлений развитии теории дифференциальных уравнений в частных производных. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода мало изучены. Доказать однозначную разрешимость таких краевых задач для уравнения второго рода не всегда удаётся. В данной работе впервые изучается нелокальная краевая задача с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, т.е. для уравнения, где линия вырождения является характеристикой.

Анализ литературы. В [1] доказано однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для уравнения эллиптического типа второго рода, в [2] доказано единственность локальной краевой задачи для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, в [3] изучены смешанные задачи для уравнения первого рода с двумя линиями вырождения, а в работе [4] получено обобщенное решение видоизменённой задачи Коши для уравнения гиперболического типа второго рода. В [5] доказана однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи с конормальной производной для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с двумя внутренними линиями и различными порядками вырождения первого рода. В работах [6 – 8]

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

исследованы смешанные краевые задачи для параболо-гиперболического типов третьего порядка второго рода.

Цель статьи – доказать однозначную разрешимость нелокальной краевой задачи с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода.

Рассмотрим уравнение

$$sign y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -1 < m < 0 \tag{1}$$

в области $D = D_1 \cup D_2$, где $D_1 -$ ограничена кривой σ при $y > 0$ с концами в точках $A(0,0), B(1,0)$ и отрезком AB $(y = 0)$, а $D_2 -$ при $y < 0$ ограничена тем же отрезком AB и характеристиками уравнения (1).

Задача. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\overline{D})$ – является регулярным решением уравнения (1) в области D_1, а в области D_2 – обобщенным решением из класса R_2 [1];

2) выполняется условие склеивания

$$-u_y(x,-0) = u_y(x,+0); \tag{2}$$

3) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\{a(s)A_s[u] + b(s)u\}\big|_\sigma = \varphi(s), \quad 0 < s < l, \tag{3}$$

$$D_{0x}^{1-\beta} u[\theta_0(x)] = c(x)u(x,0) + f(x), \quad 0 < x < 1, \tag{4}$$

где s – длина дуги σ, отсчитываемой от точки $B(1,0)$, а $a(s),\ b(s),\ \varphi(s),\ c(x),\ f(x)$ – заданные функции, причём

$$a(s)b(s) \ge 0,\ 0 \le s \le 1,\ a(s),\ b(s),\ \varphi(s) \in C[0, l],$$

а $f(x)$ – может иметь особенность порядка меньше чем -2β, где $\beta = \dfrac{m}{2(m+2)}$.

Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии [1]. Переходим к исследованию существования решения поставленной задачи.

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Решение задачи в области D_1 удовлетворяющее условию (3) и $u\big|_{y=0} = \tau(x), \quad (0 \le x \le 1)$ имеет вид [2]:

$$u(x,y) = \int_0^1 \tau(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} G_2(\xi,0;x,y) d\xi + \int_0^l \frac{\varphi(s)}{a(s)} G_2(\xi,\eta;x,y) ds, \tag{5}$$

где $G_2(\xi,\eta;x,y)$ – функция Грина данной задачи в области D_1, а в области D_2, решая видоизмененную задачу Коши для гиперболического уравнения, получим обобщенное решение из класса R_2 [3]:

$$u(\xi,\eta) = \int_0^\xi (\eta-\zeta)^{-\beta}(\xi-\zeta)^{-\beta} T(\zeta) d\zeta + \int_\xi^\eta (\eta-\zeta)^{-\beta}(\zeta-\xi)^{-\beta} N(\zeta) d\zeta, \tag{6}$$

где

$$N(\zeta) = \frac{1}{2\pi \cos \pi\beta} T(\zeta) - \gamma_2 \nu(\zeta), \tag{7}$$

$\gamma_2 = \left[2(1-2\beta)\right]^{2\beta-1} \dfrac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}$, а $T(\zeta)$ определяется из следующего определения.

Определение. Функция $u(\xi,\eta)$, определённая формулой (6), называется обобщенным решением задачи Коши для уравнения (1) в области D_2 из класса R_2 [4], в котором $\tau(x)$ имеет вид:

$$\tau(x) = \int_0^x (x-t)^{-2\beta} T(t) dt,$$

где $\nu(x)$ и $T(x)$ – непрерывные и интегрируемые функции в интервале (0;1).

Из равенств (5) и (6) получаем следующие функциональные соотношения между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\nu(x)=\frac{k_2}{2\beta(2\beta-1)}\left[\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau'(t)}{(x-t)^{-2\beta}}dt+\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\tau'(t)}{(t-x)^{-2\beta}}dt\right]-$$

$$-k_2\int_0^1\frac{\tau(t)dt}{(t+x-2xt)^{2-2\beta}}+\int_0^1\tau(t)\frac{\partial^2 H_2(t,0;x,0)}{\partial\eta\partial y}dt+ \qquad (8)$$

$$+\int_0^l\chi(s)\frac{\partial q_2(\xi,\eta;x,0)}{\partial y}ds+\frac{k_2}{\beta(2\beta-1)}x^{2\beta}\tau'(0)$$

и

$$\tau'(x)=-2\beta\gamma_3\int_0^x(x-t)^{-2\beta-1}\nu(t)dt-$$

$$-2\beta\gamma_3\int_0^x(x-t)^{-2\beta-1}dt\int_0^t R(t,z)\nu(z)dz+F_0'(x), \qquad (9)$$

где $F_0(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x(x-t)^{-2\beta}t^\beta f(t)dt+\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x(x-t)^{-2\beta}dt\int_0^t R(t,z)t^\beta f(z)dz,$

а $R(t,z)$ – есть резольвента следующего интегрального уравнения

$$T(x)=\lambda_1\int_0^x K(x,t)T(t)dt+F(x),$$

где $\lambda_1=\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}$, $K(x,t)=(x-t)^{-2\beta}x^\beta c(x)$, $F(x)=\frac{x^\beta f(x)}{\Gamma(1-\beta)}+\gamma_3\nu(x)$, $\gamma_3=2\pi\gamma_2\cos\pi\beta$.

Существование решения задачи для уравнения (1) в силу (5) и (6) эквивалентно разрешимости систем (8) и (9). Подставляя (8) в (9) после некоторых вычислении, с учётом условия склеивания (2) и $x^{2\beta}\tau'(x)=\rho(x)$, получим сингулярное интегральное уравнение с ядром типа Коши. Применяя известный метод регуляризации, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, эквивалентное поставленной задаче, разрешимость которого следует из единственности решение сформулированной задачи.

Выводы: В статье представлены новые математические результаты, связанные с изучением нелокальной краевой задачи с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода. Показано, что сформулированная в работе задача имеет единственное решение. Этот результат может использоваться при моделировании газо- и гидродинамических процессов.

Список литературы:
1. *Islomov B.I.* On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition / *B.I. Islomov, A.A. Abdullayev* // Journal Nanosystems: physics, chemistry, mathematics. – 2018. – Vol 9 (3). – P. 307-318.
2. *Abdullayev A.A.* On uniqueness of a boundary value problem for an equation of elliptichyperbolic type of the second kind / *A.A. Abdullayev* // Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2018. – Vol 5. – P. 30-35.
3. *Салахитдинов М.С.* Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения / *М.С. Салахитдинов, Б.И. Исломов.* – Ташкент: "Мумтоз суз", 2010. – 264 с.
4. *Мамадалиев Н.К.* О представлении, решения видоизмененной задачи Коши / *Н.К. Мамадалиев* // Сибирский математический журнал РАН. – 2000. – Т. 41. – № 5. – С. 1087-1097.
5. *Салахитдинов М.С.* Нелокальная краевая задача с конормальной производной для уравнения смешанного типа с двумя внутренними линиями и различными порядками вырождения / *М.С. Салахитдинов, Б.И. Исломов* // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 1. – С. 49-58.
6. *Salakhitdinov M.S.* A nonlocal boundary-value problem with the Bitsadze-Samarskii conditon for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind / *M.S. Salakhitdinov, N.B. Islamov* // Russian Mathematics. **–** 2015. – Vol. 59. –№. 6. – P. 34-42.
7. *Baltaeva U.I.* Solvability of the analogs of the problem Tricomi for the mixed type loaded equations with parabolic-hyperbolic operators / *U.I. Baltaeva* // Boundary Value Problems. – 2014. – Vol 211. – P. 1-12.
8. *Islomov B.* Boundary Value Problems for the Classical and Mixed Integrodifferential Equations with Riemann-Liouville Operators / *B. Islomov, U.I. Baltaeva* // International Journal of Partial Differential Equations. – 2013, Article ID 157947, 7 pages http://dx.doi.org/10.1155/2013/157947 (accepted 30 July 2013).

References:
1. Islomov, B.I. and Abdullayev, A.A. (2018), "On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition", *Journal Nanosystems: physics, chemistry, mathematics,* Vol 9 (3), pp. 307-318.
2. Abdullayev, A.A. (2018), "On uniqueness of a boundary value problem for an equation of elliptichyperbolic type of the second kind", *Bulletin of the Institute of Mathematics,* Vol 5, pp. 30-35.
3. Salakhitdinov, M.S., and Islomov, B.I. (2010), *Equations of mixed type with two lines of degeneracy,* "Muмtoz suz", Tashkent, 264 p.
4. Mamadaliev, N.K. (2000), "On the representation, solving the modified Cauchy problem", *Siberian Mathematical Journal of the Russian Academy of Sciences*, Vol. 41, No. 5, pp. 1087-1097.
5. Salakhitdinov, M.S, and Islomov, B.I. (2011), "Nonlocal boundary value problem with a conormal derivative for a mixed type equation with two internal lines and different orders of degeneracy", *Izv. universities. Matematics,* No. 1, pp. 49-58.

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

6. Salakhitdinov, M.S. and Islamov, N.B. (2015), "A nonlocal boundary-value problem with the Bitsadze-Samarskii conditon for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind", *Russian Mathematics,* Vol. 59, No. 6, pp. 34-42.
7. Baltaeva, U.I. (2014) , "Solvability of the analogs of the problem Tricomi for the mixed type loaded equations with parabolic-hyperbolic operators", *Boundary Value Problems*, Vol. 211, pp. 1-12.
8. Islomov, B. and Baltaeva, U.I. (2013), "Boundary Value Problems for the Classical and Mixed Integrodifferential Equations with Riemann-Liouville Operators", *International Journal of Partial Differential Equations,* Vol. 2013, Article ID 157947, 7 pages http://dx.doi.org/10.1155/2013/157947 (accepted 30 July 2013).

Статью представил доктор техн. наук, проф. Б.А. Худаяров, зав. кафедры "Высшая математика", Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства.

Поступила (*received*) *20.10.2018*

Abdullayev Akmaljon Abdujalilovich,
Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers
Higher mathematics,
Str. Kari Niyaziy, 39, Tashkent, Uzbekistan, 100000,
Tel: +99893 397-12-39, e-mail: akmal09.07.85@mail.ru
ORCID ID: 0000-0002-4542-1226

Safarbayeva Nigora Mustafayevna
Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers
Higher mathematics,
Str. Kari Niyaziy, 39, Tashkent, Uzbekistan, 100000,
Tel: +99893 584-12-59, e-mail: n.safarbayev@tiiame.uz
ORCID ID: 0000-0002-4542-1227

УДК 517.956.6

Про одну крайову задачу для рівняння змішаного типу другого роду / Абдуллаєв А.А., Сафарбаева Н.М. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2018. – № 42 (1318). – С. 5 – 11.

Стаціонарні процеси різної фізичної природи (коливання, теплопровідність, дифузія, електростатика і т.д.) описуються рівняннями еліптичного типу. Зокрема, у деяких моделях, таких, як гідро і газової динаміки розглядаються еліптичні рівняння. У даній роботі вивчається нелокальна крайова задача з умовою Пуанкаре для рівняння елліптіко-гіперболічного типу другого роду, тобто для рівняння, де лінія виродження є характеристикою. Бібліогр.: 8 назв.

Ключові слова: нелокальна крайова задача; умови Пуанкаре; рівняння елліптіко-гіперболічного типу другого роду.

УДК 517.956.6

Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода / Абдуллаев А.А., Сафарбаева Н.М. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2018. – № 42 (1318). – С. 5 – 11.

Стационарные процессы различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия, электростатика и т.д.) описываются уравнениями эллиптического типа. В частности, некоторых моделях, таких, как гидро и газовой динамики рассматриваются эллиптические уравнения. В данной работе изучается нелокальная краевая задача с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, т.е. для уравнения, где линия вырождения является характеристикой. Библиогр.: 8 назв.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача; условия Пуанкаре; уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода.

UDC 517.956.6

On a boundary value problem for a mixed type equation of the second kind / Abdullaev AA, Safarbaeva N.M. // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2018. – №.42 (1318). – P. 5 – 11.

Stationary processes of different physical nature (oscillations, thermal conductivity, diffusion, electrostatics, etc.) are described by equations of elliptic type. In particular, some models, such as hydro and gas dynamics, consider elliptic equations. In this paper, we study a nonlocal boundary value problem with the Poincaré condition for an equation of the elliptic-hyperbolic type of the second kind, i.e. for an equation where the line of degeneration is a characteristic. Refs.: 8 titles.

Keywords: nonlocal boundary value problem; Poincaré conditions; equations of elliptic-hyperbolic type equations of the second kind.