

УДК 519.6

DOI: 10.20998/2411-0558.2018.42.04

**В. В. ВАХОБОВ**, доц., ТИИМСХ, Ташкент

## О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ МИНИМАКСНОГО ПЛАНА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИЁМОЧНОГО КОНТРОЛЯ

Оценка качества готовой промышленной или сельскохозяйственной продукции, например, длина или диаметр изготовленной детали, всхожесть зерна, длина волокна хлопка и другие факторы исследования проводятся методами статистического приемочного контроля (СПК). СПК дает возможность, с одной стороны, осуществить текущий контроль производственного процесса, своевременно предотвращая выпуск некачественных изделий, с другой стороны, позволяет с наименьшими затратами проводить приемку выпускаемой готовой продукции. Последнее достигается с помощью выбора планов СПК. В данной работе рассматривается вопрос о выборе параметров последовательного контроля, минимизирующего максимальные потери. Библиогр.: 10 назв.

**Ключевые слова:** оценка качества; статистический приемочный контроль; текущий контроль; производственный процесс.

**Постановка проблемы.** Наиболее распространенная форма выбора планов СПК заключается в следующем:

Из генеральной совокупности, представленной на контроль, извлекается случайная выборка объема  $n$  и измеряется качественный или количественный признак  $X$ . Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – результаты выборочного обследования на основании которого строятся оценка  $g(\bar{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$  и рассматривается следующее решающее правило:

Если  $g(\bar{\theta}_n) \leq k$ , то оставшаяся часть изделий (не попавшая в выборку) без обследования принимается, а в противном случае, т.е. при  $g(\bar{\theta}_n) > k$ , представленные контролю изделия отвергаются.

Приведенное приемочное правило определяется заданием параметров  $n$  и  $k$  она называется статистическим планом. Выбор плана контроля, т.е. определение параметров  $(n, k)$  может быть осуществлено различными способами в зависимости от соответствующих требований. Например, в зависимости от наличия или отсутствия априорной информации о неизвестном параметре  $\theta$  распределения наблюдаемой совокупности существует два подхода к решению задачи о выборе оптимального плана, а именно минимаксный и байесовский. В минимаксном подходе параметры  $(n, k)$  выбираются из условия минимальности максимальной потери от принятых или отверженных совокупностей изделий.

В данной работе рассматривается выбор параметров минимаксного

плана последовательного контроля при более общих предположениях относительно вида средней функции потерь, когда количественный признак  $X$  имеет функцией распределения  $F(x, \theta)$ , При этом будем считать что  $M(X) = \theta$ ,  $D(X) = \sigma^2(\theta)$ .

**Анализ литературы.** В работах [2, 3] изучено нахождение параметров последовательного контроля, когда средняя функция потерь является линейной относительно доли дефектных объектов и контролируемый признак  $X$  имеет гауссовское распределение,

В работах [5, 6] изучены асимптотические свойства однократного и двукратного минимаксного плана по многомерному количественному признаку соответственно.

В работе [7] при довольно общих предположениях относительно функции потерь и выборочной стоимости исследованы асимптотические свойства двукратного плана по многомерному количественному признаку.

Необходимо отметить, что первоначальные исследования задачи выбора планов СПК по качественным и количественным признакам изучены в работах [8 – 10]. При этом в [8] изучается контроль по качественному признаку, когда признак  $X$  распределен по биномиальному закону. В (9) исследован случай плана СПК по количественному признаку  $X$  имеющему гауссовское распределения. В работе [10] исследован байесовский однократный выборочный план для дискретного априорного распределения. Дальнейшие исследованные по выборам плана контроля продолжены в работах [11] и [12], которые рассматривают случай, когда распределение признака принадлежит достаточно широкому классу непрерывных распределений.

**Цель статьи** – найти оптимальные параметры последовательного СПК, минимизирующего максимальную потерю.

Пусть на контроль представлена совокупность объема  $N$  изделий, которые характеризуются качественным или количественным признаком  $X$ . Будем считать, что  $X$  представляет собой случайную величину с функцией распределения  $F(x, \theta)$ ,  $(-\infty < x < \infty)$ , зависящей от неизвестного параметра  $\theta$ , с

$$M(x) = \theta, \quad D(x) = \sigma^2(\theta).$$

Положим

$$g(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x, \theta) dF(x, \theta), \quad (1)$$

где  $k(x, \theta)$  – функция такая, что интеграл (1) существует.

Если  $k(x, \theta) = x$ , то  $g(\theta)$  представляет собой долю дефектных изделий в контроле по качественному признаку. В случае, когда дефектность определяется некоторым количественным признаком  $X$ , положив

$$k(x, \theta) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq T, \\ 1, & \text{при } x \geq T, \end{cases}$$

получим

$$g(\theta) = \int_{-T}^{\infty} dF(x, \theta) = 1 - F(T, \theta).$$

Здесь  $T$  – заданное число (допустимый предел рассматриваемого признака). В этом случае  $g(\theta)$  означает долю дефектных изделий в контроле по количественному признаку. Пусть  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – оценка максимального правдоподобия параметра  $\theta$  (существование этой оценки предполагается).

Вышеприведенные рассуждения показывают, что процесс проведения статистического приемочного контроля (СПК) может быть основан на изучении статистики  $g(\theta_n)$ , и в такой постановке эти задачи приобретают наибольшую общность.

Выборочный план последовательного контроля состоит в следующем: из партии берут по одному изделию и измеряют значение контролируемого признака. Если  $g(\theta_n) \leq -h + nk$ , то всю партию принимают, а если  $g(\theta_n) \leq h + nk$ , то всю партию отвергают, и наконец, если  $-h + nk \leq g(\theta_n) \leq h + nk$ , то процесс контроля продолжится, берут еще одно  $(n+1)$ -ое изделие ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Последовательный процесс контроля определяется заданием числовых параметров  $h$  и  $k$ .

В работах [2, 3] исследован минимаксный план в случае, когда

$$g(\theta_n) = \theta_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Как замечено, во многих работах по СПК [2 – 4], существует значение параметра  $\theta = \theta_0$ , при котором ущербы от принятия и отвержения совокупности совпадают. В нашем случае таким значением безразличия являются  $g(\theta_n)$ . По аналогии с работами [5, 6] введем следующую функцию потери

$$\Pi(g(\theta), g(\theta_n)) = \begin{cases} \Pi_1(g(\theta_0) - g(\theta))^{v_1}, & \text{если } g(\theta) \leq g(\theta_0), \\ \Pi_2(g(\theta_0) - g(\theta))^{v_2}, & \text{если } g(\theta) > g(\theta_0), \end{cases} \quad (2)$$

где  $v_1, v_2, \Pi_1, \Pi_2$  – положительные параметры (стоимостные, постоянные). Параметры  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  зависят от объёма совокупности  $N$  и  $\Pi_1 = \alpha \cdot \Pi_2$  при некотором  $\alpha > 0$ .

Кроме того, предположим, что стоимость выборочного наблюдения как функция от  $M$  при больших  $M$  имеет вид:

$$r_s(M) = cM^s(1 + O(1)),$$

где  $c > 0$  не зависит от  $M$ ,  $s \geq 1$ .

Средняя потеря

$$R_{cp}(h, k, g(\theta_n)) = \begin{cases} \Pi(g(\theta), g(\theta_0)) \cdot P(g(\theta_n)) > h + nk, \\ \text{если } g(\theta) \leq g(\theta_0), \\ \Pi(g(\theta), g(\theta_0)) \cdot P(g(\theta_n)) \leq -h + nk, \\ \text{если } g(\theta) > g(\theta_0). \end{cases} \quad (3)$$

Тогда остаточная функция  $R(h, k, g(\theta)) = r_s(M) + R_{cp}(h, k, g(\theta))$ .

В минимаксном подходе план контроля считается оптимальным, если его параметры  $(h, k)$  удовлетворяют равенству

$$\sup_{\theta} R(h, k, g(\theta)) = \inf_{h, k} \sup_{\theta} R(h, k, g(\theta)).$$

Нетрудно показать, что для вероятности принятия партии и математического ожидания среднего числа контролируемых изделий, имеют место соотношения:

$$P(g(\theta) \leq -h + kn) = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} - e^{-2w}} = \frac{1}{2}(1 - thw), \quad (4)$$

$$M = \frac{h^2}{\sigma^2(\theta)} \cdot \frac{thw}{w}, \quad w = \frac{k - \theta}{\sigma^2(\theta)} \cdot h. \quad (5)$$

В работе установлены асимптотические решения для параметров оптимального плана, в частности, получен следующий результат:

*Теорема.* Если  $\Pi_1 = \Pi_2 = O(N)$  и  $v_1 = v_2 = v$  то для параметров оптимального плана имеют место соотношения:

$$h_0 = \left( \frac{|w_0|^2(1-thw_\omega)}{2 \cdot thw_0} \right) \cdot g(w_0)^{\frac{1}{2s+\vartheta}} \cdot N^{-\frac{1}{2s+\vartheta}} + O \left( N^{-\frac{1}{2s+\vartheta}} \right),$$

$$k_0 = \theta_0 + \frac{w(\theta_0)}{h_0} \cdot \sigma^2(\theta_0) + O \left( N^{-\frac{2}{2s+\vartheta}} \right).$$

Оптимальные значения для среднего числа контролируемых изделий и остаточной функции потерь будут равны соответственно:

$$M_0 = \left( \frac{thw_0}{w_0} \cdot \frac{1}{\sigma_0^2} \right) h_0^{\frac{2}{2s+\vartheta}},$$

$$R_{on} = \min_{h,k} \max_w R(h,k,g(w)) = \left( 1 + \frac{2s}{v} \right) M_0 C.$$

**Выводы:** В работе исследованы оптимальные параметры плана СПК по количественному признаку в схеме проведения испытаний по последовательному анализу. При этом допускается, что функции потерь имеют (в отличие от упомянутых работ) более общий вид.

#### Список литературы:

1. Вальд А. Последовательный анализ / А. Вальд. – М.: Физматгиз, 1960. – 328 с.
2. Moziguti S. Notes on Sampling Inspections Plans / S. Moziguti // Reports of Statistical Appl. Research. – USE. – 1955. – Vol. 3. – № 4.
3. Сирожидинов С.Х. Об оптимальных планах статистического контроля по количественному признаку / С.Х. Сирожидинов, А. Ражабов // Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук. – 1973. – № 4.
4. Ваҳобов В. Об асимптотике оптимальных параметров статистического контроля / В. Ваҳобов, Л. Ражабова // Материалы V-международной Ферганской конференции. – г. Фергана, 10-12 мая – 2005.
5. Абдалимов Б. Об асимптотике параметров минимаксного плана приёмочного контроля / Б. Абдалимов, В. Вахобов // Объединенный научный журнал. – 2008. – № 11 (217). – С. 45-53.
6. Абдалимов Б. Об оптимальных планах контроля по многомерному количественному признаку / Б. Абдалимов, В. Вахобов // Объединенный научный журнал. – 2009. – № 12 (230). – С. 56-59.
7. Абдалимов Б. О планах контроля по многомерному количественному признаку / Б. Абдалимов, В. Вахобов Л. Ражабова // Материалы республиканской научно-практической конференции. Статистика и ее применение. – 2012. – С. 45-49.
8. Van der Waerden B.L. Sampling inspection as a minimum loss problem / B.L. Van der Waerden // Ann. Math. Statist. – 1960. – Vol. 31. – № 2.
9. Strange K. Die Berechnung wirtschaftlicher plane für messende Prüfung / K. Strange // Metrika. – 1964. – Vol. 8. – № 1. – P. 48-82.

10. Hald A. Bayesian single sampling plans for discrete prior distributions / A. Hald // *Mat. Fys. Skr. Dan.Vid. Selsk.* – 1965. – Vol. 3. – № 2. – P. 1-88.
11. Гродзенский С.Я. Управление качеством / С.Я. Гродзенский. – Учебник. – М.: Проспект, 2017. – 226 с.
12. Юдин С.В. Методика расчета информационных планов статистического приемного контроля на основе байесовского подхода / С.В. Юдин, В.Е. Протасьев, Р.Ю. Подкопаев, А.С. Юдин // *Современные наукоемкие технологии.* – 2018. – № 11. – С. 90-94.

**References:**

1. Wald, A. (1960), *Sequential analysis*. Fizmatgiz, Moscow, pp. 328.
2. Moziguti, S. (1955), "Notes on Sampling Inspections Plans", *Reports of Statistical Appl. Research*, USE, vol. 3, No. 4.
3. Sirozhidinov, S.H., and Rajabov, A. (1973), "On optimal plans for statistical control on a quantitative basis", *Proceedings of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR, series physical-mat. of science*, No. 4.
4. Vahobov, V., and Rajabova, L. (2005), "On the asymptotics of the optimal parameters of statistical control", *Materials of the V-International Fergana Conference*. G. Fergana, 10-12 May.
5. Abdalimov, B., and Vahobov, V. (2008), "On the asymptotics of the parameters of the minimax acceptance control plan", *United Scientific Journal*, No. 11 (217), pp. 45-53.
6. Abdalimov, B., and Vahobov, V. (2009), "On optimal control plans for a multidimensional quantitative trait", *United Scientific Journal*, No. 12 (230), pp. 56-59.
7. Abdalimov, B., Vahobov, V., and Rajabova, L. (2012), "On control plans for a multidimensional quantitative trait", *Materials of the Republican Scientific and Practical Conference. Statistics and its application*, pp. 45-49.
8. Van der Waerden B.L. (1960), "Sampling inspection as a minimum loss problem". *Ann.Math.Statis.*, Vol. 31, No. 2.
9. Strange, K. (1964), "Die Berechnung wirtschaftlicher plane für messende Prüfung" *Metrika*, Vol. 8, No. 1, pp. 48-82.
10. Hald, A. (1965), "Bayesian single sampling plans for discrete prior distributions" *Mat. Fys. Skr. Dan.Vid. Selsk.*, Vol.3, No. 2, pp. 1-88.
11. Grodzensky, S.Ya. (2017), *Quality control*, Textbook, Avenue, Moscow, 226 p.
12. Yudin, S.V., Protasyev, V.E., Podkopaev, R.Yu., and Yudin A.S. (2018), "The method of calculating information plans for statistical reception control based on the Bayesian approach", *Modern high technologies*, No. 11, pp. 90-94.

*Статью представил доктор техн. наук, проф. Б.А. Худаяров, зав. кафедры "Высшая математика", Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент.*

*Поступила (received) 22.10.2018*

Vahobov Valijon Vahobovich, PhD  
Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers  
Higher mathematics,  
Str. Kari Niyaziy, 39, Tashkent, Uzbekistan, 100000,  
Tel: +99890 975-22-93, e-mail:  
ORCID ID: 0000-0002-4542-1230

УДК 519.6

**Про вибір параметрів мінімаксного плану послідовного приймального контролю / Ваховов В.В.** // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2018. – № 42 (1318). – С. 131 – 137.

Оцінка якості готової промислової чи сільськогосподарської продукції, наприклад, довжина або діаметр виготовленої деталі, схожість зерна, довжина волокна бавовни і інші чинники дослідження проводяться методами статистичного приймального контролю (СБК). СПК дає можливість, з одного боку, здійснити поточний контроль виробничого процесу, своєчасно запобігати випуск неякісних виробів, з іншого боку, дозволяє з найменшими витратами проводити приймання готової продукції. Останнє досягається за допомогою вибору планів СПК. У даній роботі розглядається питання про вибір параметрів послідовного контролю, що мінімізує максимальні втрати. Бібліогр.: 10 назв.

**Ключові слова:** оцінка якості; статистичний приймальний контроль; поточний контроль; виробничий процес.

УДК 519.6

**О выборе параметров минимаксного плана последовательного приёмочного контроля / Ваховов В.В.** // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2018. – № 42 (1318). – С. 131 – 137.

Оценка качества готовой промышленной или сельскохозяйственной продукции, например, длина или диаметр изготовленной детали, всхожесть зерна, длина волокна хлопка и другие факторы исследования проводятся методами статистического приемочного контроля (СПК). СПК дает возможность, с одной стороны, осуществить текущий контроль производственного процесса, своевременно предотвратить выпуск некачественных изделий, с другой стороны, позволяет с наименьшими затратами проводить приемку выпускаемой готовой продукции. Последнее достигается с помощью выбора планов СПК. В данной работе рассматривается вопрос о выборе параметров последовательного контроля, минимизирующего максимальные потери. Библиогр.: 10 назв.

**Ключевые слова:** оценка качества; статистический приемочный контроль; текущий контроль; производственный процесс.

UDC 519.6

**On the choice of the parameters of the minimax plan of the sequential acceptance control / Vakhobov V.V.** // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2018. – № 42 (1318). – P. 131 – 137.

The quality assessment of finished industrial or agricultural products, for example, the length or diameter of the manufactured part, grain germination, cotton fiber length, and other factors, are carried out by statistical acceptance control (SEC) methods. SEC provides an opportunity, on the one hand, to carry out current control of the production process, timely preventing the release of low-quality products, on the other hand, allows for the lowest cost to carry out the acceptance of manufactured finished products. The latter is achieved by selecting the SEC plans. In this paper, the question of choosing the parameters of sequential control minimizing the maximum loss is considered. Refs.: 10 titles..

**Keywords:** quality assessment; statistical acceptance control; current control; production process.