Вісник Національного технічного університету "ХПІ", 2018, № 42 (1318)
ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

УДК 861.5.015.2 **DOI: 10.20998/2411-0558.2018.42.08**

В. Д. ДМИТРИЕНКО, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПИ",
А. Ю. ЗАКОВОРОТНЫЙ, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПИ",
Н. В. МЕЗЕНЦЕВ, канд. техн. наук, доц., НТУ "ХПИ",
Д. М. ГЛАВЧЕВ, асп., НТУ "ХПИ"

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА ПОИСКА ФУНКЦИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ К ЭКВИВАЛЕНТНЫМ ЛИНЕЙНЫМ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Один из факторов, мешающих расширению области применения геометрической теории управления, это необходимость для определения функций преобразования, связывающих переменные линейных и нелинейных моделей, решать систему дифференциальных уравнений в частных производных при ограничениях в виде дифференциальных неравенств. Решение этой системы уравнений в общем случае не является тривиальной задачей. В статье исследуется влияние вида правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих нелинейный объект, на сложность определения функций преобразования. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: геометрическая теория управления; функции преобразования; система дифференциальных уравнений в частных производных.

Постановка проблемы и анализ литературы. Геометрическая теория управления (ГТУ) [1 – 8], являясь перспективным методом теории автоматического управления (ТАУ), имеет всё же узкую область применения. Более широкому применению ГТУ мешают сложные аналитические вычисления при определении производных и скобок Ли, инволютивности распределений, функций преобразования, устанавливающих связи между переменными линейных моделей в форме Бруновского с переменными в исходных нелинейных моделях объектов управления. Практически все эти преобразования удалось автоматизировать с помощью разработанного программного обеспечения [7, 9, 10], что расширило область применения ГТУ с объектов, описываемых несколькими нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, на объекты, которые описываются системами, содержащими десятки уравнений [7]. Второй фактор, мешающий расширить области применения ГТУ – это необходимость для определения функций преобразования, связывающих переменные линейных и нелинейных моделей, решать систему дифференциальных уравнений в частных производных при ограничении в виде дифференциальных неравенств [7]. Решение этой системы уравнений в общем случае не является тривиальной задачей. При этом, сложность её решения существенно зависит от сложности правых частей обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих исходный нелинейный объект управления. В связи с этим авторы, использующие ГТУ, стремятся описать исходный объект таким образом, чтобы правые части дифференциальных уравнений содержали минимальное число одночленов. Например, в монографии [3] описывается линеаризация электропривода, где исходная модель объекта управления, описываемая пятью нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, содержащими в своих правых частях 15 одночленов, преобразуется к эквивалентной модели, содержащей в правых частях дифференциальных уравнений 8 одночленов (в каждом уравнении в правой части – один или два одночлена), и только затем модель преобразуется к линейной форме Бруновского. Отсюда можно сделать вывод о том, что уменьшение числа одночленов в правых частях дифференциальных уравнений весьма существенно для дальнейшего поиска функций преобразований.

В связи с этим актуально исследование метода получения решений системы дифференциальных уравнений в частных производных при ограничениях в виде дифференциальных неравенств при различной сложности правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные объекты.

Целью статьи является исследование применяемого метода решения системы дифференциальных уравнений в частных производных при ограничениях в виде дифференциальных неравенств с целью установления области его эффективного применения и поиска новых методов решения указанной системы уравнений при возрастании сложности моделей исходных нелинейных объектов.

В работе [10] рассматривается метод поиска функций преобразования для объекта, описываемого следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_2 = g_1;$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_3x_5 + a_{22} + a_{23}x_2 + a_{24}x_2^2 + a_{25}x_1 + a_{26}x_1^2 + a_{27}x_1^3 = g_2; \qquad (1)$$
$$\frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_3 + a_{32}x_4 = g_3;$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_4}{dt} = a_{41}x_4 + a_{42}x_3 + v_1 = g_4 + v_1;\\
&\frac{dx_5}{dt} = a_{51}x_2 + a_{52}\frac{x_6}{x_3} = g_5;\\
&\frac{dx_6}{dt} = a_{61}x_6 + a_{62}x_2x_3 + x_7 = g_6;\\
&\frac{dx_7}{dt} = g_7 + v_2.
\end{aligned} \qquad (1)$$

С системой уравнений (1) связаны следующие векторные поля:

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 = 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_7)$.

Проверка инволютивности распределений $\boldsymbol{M}^0 = \mathrm{span}(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2)$, $\boldsymbol{M}^1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{L_X Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2\}$, $\boldsymbol{M}^2_{\boldsymbol{Y}_1} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_1, \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}_1\}$, $\boldsymbol{M}^2_{\boldsymbol{Y}_2} =$ $= \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{L_X Y}_2, \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}_2\}$, $\boldsymbol{M}^3_{\boldsymbol{Y}_1}$, $\boldsymbol{M}^3_{\boldsymbol{Y}_2}$ показала, что система уравнений (1) может быть преобразована к форме Бруновского:

$$\begin{gathered}
\frac{dz_{\mathrm{i}}}{dt} = z_{i+1},\ \ i = 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6;\\
\frac{dz_4}{dt} = u_1,\ \frac{dz_7}{dt} = u_2.
\end{gathered} \qquad (3)$$

где $\mathrm{span}(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2)$ – линейная оболочка векторов $\boldsymbol{Y}_1$ и $\boldsymbol{Y}_2$; $\boldsymbol{L_X Y}_1$, $\boldsymbol{L_X Y}_2$ – производные Ли соответствующих векторов вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$; $\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}_2$ – производные Ли второго порядка соответственно векторов $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$.

Усложним правые части четвертого и шестого дифференциальных уравнений объекта (1). В результате получим следующую систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = g_1;\\
&\frac{dx_2}{dt} = g_2;\\
&\frac{dx_3}{dt} = g_3;\\
&\frac{dx_4}{dt} = g_4 + a_{43}x_2x_6 + u_1;\\
&\frac{dx_5}{dt} = g_5;\\
&\frac{dx_6}{dt} = g_6 + a_{63}x_2x_4;\\
&\frac{dx_7}{dt} = g_7 + u_2.
\end{aligned} \qquad (4)$$

С системой уравнений (4) связаны следующие векторные поля:

$$\boldsymbol{X}^* = \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 + a_{43}x_2x_6 \\ g_5 \\ g_6 + a_{63}x_2x_4 \\ g_7 = 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4^* \\ g_5 \\ g_6^* \\ g_7 \end{vmatrix}, \ \boldsymbol{Y}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \ \boldsymbol{Y}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

где $g_4^* = g_4 + a_{43}x_2x_6$; $g_6^* = g_6 + a_{63}x_2x_4$.

Проверка инволютивности распределений $\boldsymbol{M}^0$, $\boldsymbol{M}^1$, $\boldsymbol{M}^2$, $\boldsymbol{M}^3$ для объекта (4) усложняется в связи с получением более сложных производных Ли второго и третьего порядка.

Форма Бруновского для объекта (4) имеет вид (3), то есть, совпадает с формой Бруновского для объекта (1).

Для системы уравнений (3) существуют преобразования $z_1 = T_1(\boldsymbol{x}) = T_1(x_1, x_2, ..., x_7)$ и $z_5 = T_2(\boldsymbol{x}) = T_2(x_1, x_2, ..., x_7)$, с помощью которых, выполняя дифференцирование функций $T_k(\boldsymbol{x})$, $k = 1,2$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}^* + u_1\boldsymbol{Y}_1 + u_2\boldsymbol{Y}_2$, можно определить z_p, $p = \overline{2,\ 7}$:

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1} T_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\, \mathrm{T}_1(\boldsymbol{x}) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_1(\boldsymbol{x}) + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_1(\boldsymbol{x}); \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \frac{dz_2}{dt} = z_3 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\, T_1(x)) = \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*} (T_1(\boldsymbol{x})) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} (T_1(x)) + \\ + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\, T_1(\boldsymbol{x})); \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \frac{dz_3}{dt} = z_4 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1} (\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}}\, T_1(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*} (T_1(\boldsymbol{x})) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} (\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*} (T_1(\boldsymbol{x}))) + \\ + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} (\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\, T_1(\boldsymbol{x})); \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \frac{dz_4}{dt} = u_1 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1} (\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}}\, T_1(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}^4_{\boldsymbol{X}^*} (T_1(\boldsymbol{x})) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} (\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\, T_1(\boldsymbol{x})) + \\ + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} (\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\, T_1(\boldsymbol{x})); \end{gathered} \tag{8}$$

$$\frac{dz_5}{dt} = z_6 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1} T_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_2(\boldsymbol{x}) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_2(\boldsymbol{x}) + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_2(\boldsymbol{x}); \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \frac{dz_6}{dt} = z_7 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\, T_2(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*} (T_2(\boldsymbol{x})) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_2(\boldsymbol{x})) + \\ + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\, T_2(\boldsymbol{x})); \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \frac{dz_7}{dt} = u_2 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1} (\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}}\, T_2(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*} (T_2(\boldsymbol{x})) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} (\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*} T_2(\boldsymbol{x})) + \\ + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} (\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\, T_2(\boldsymbol{x})), \end{gathered} \tag{11}$$

где $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1} T_k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_k(\boldsymbol{x})$, $k = 1,\ 2$ – производные Ли функций $T_k(\boldsymbol{x})$ вдоль векторных полей $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}^*$, $\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_2$; $\boldsymbol{L}^m_G$ – кратные производные Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{G}\ (\boldsymbol{G} = \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2)$, $m = 2,\ 3$.

Из системы уравнений в форме Бруновского (3) следует, что переменные z_1, z_2, z_3, z_5 и z_6 не зависят от управлений u_1 и u_2. Исходя из этого, следует что в выражениях (5) – (7), (9), (10) коэффициенты при управлениях u_1 и u_2 равны нулю:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\, T_1(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\, T_1(\boldsymbol{x})) = \\ = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} (\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}}\, T_1(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} (\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}}\, T_1(\boldsymbol{x})) = 0; \end{gathered} \tag{12}$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}} T_2(\boldsymbol{x})) = = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}} T_2(\boldsymbol{x})) = 0. \tag{13}$$

При этом, коэффициенты при управлениях u_1^* и u_2^* в уравнениях (8) и (11) не равны нулю:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 T_1(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 Y_1 \right\rangle \neq 0; \\ &\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 T_1(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 Y_2 \right\rangle \neq 0; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_2(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 \boldsymbol{Y}_1 \right\rangle \neq 0; \\ &\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_2(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 \boldsymbol{Y}_2 \right\rangle \neq 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Соотношения (12) – (15) в компактной форме описывают 10 дифференциальных уравнений в частных производных и четыре дифференциальных неравенства, с помощью которых можно определить функции преобразования $T_1(\boldsymbol{x})$ и $T_2(\boldsymbol{x})$. Эти функции в общем случае могут зависеть от семи компонент вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_7)$. Понятно, что эти функции для объектов (1) и (4) различны. Обозначим их соответственно для первого и второго объекта соответственно $T_1^1(\boldsymbol{x})$, $T_2^1(\boldsymbol{x})$, $T_1^2(\boldsymbol{x})$, $T_2^2(\boldsymbol{x})$. Определим вначале функцию $T_1^1(\boldsymbol{x})$ для объекта (1). Из первых двух дифференциальных уравнений имеем:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_1^1(\boldsymbol{x}) = \left\langle \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{Y}_1 \right\rangle = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} y_{1i} = \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \cdot 0 + + \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_3} \cdot 0 + \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_4} \cdot 1 + \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_5} \cdot 0 + \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_6} \cdot 0 + \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_7} \cdot 0 = 0; \tag{16}$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_1^1(\boldsymbol{x}) = \left\langle \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{Y}_2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \cdot 0 + \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_7} \cdot 1 = 0. \tag{17}$$

Отсюда следует, что функция $T_1^1(\boldsymbol{x})$ не зависит от аргументов x_4 и x_7. Для дальнейшего анализа функции $T_1^1(\boldsymbol{x})$ используем из соотношений (12) следующие четыре дифференциальных уравнения в

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

частных производных, в которых используются производные Ли первого и второго порядка:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\,T_1^1(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_1^1}{\partial x}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_1 \right\rangle = 0; \qquad (18)$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\,T_1(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_1^1}{\partial x}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_2 \right\rangle = 0; \qquad (19)$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2\,T_1(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_1^1}{\partial x}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2\boldsymbol{Y}_1 \right\rangle = 0; \qquad (20)$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2\,T_1(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_1^1}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2\boldsymbol{Y}_2 \right\rangle = 0, \qquad (21)$$

где

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_1 = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_1] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_1}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1 = -\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1 =$$

$$= -\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_7} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_7} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_7}{\partial x_1} & \frac{\partial g_7}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_7}{\partial x_7} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{25}+2a_{26}x_1+3a_{27}x_1^2 & a_{23}+2a_{24}x_2 & a_{21}x_5 & 0 & a_{21}x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{42} & a_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{51} & -a_{52}\frac{x_6}{x_3^2} & 0 & 0 & \frac{a_{52}}{x_3} & 0 \\ 0 & a_{62}x_3 & a_{62}x_2 & 0 & 0 & a_{61} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a_{32} & -a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}; \qquad (22)$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_2 = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_2] = -\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2 = \left| 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0 \right|^{\mathrm{T}}; \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2\boldsymbol{Y}_1 = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_1] = -\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_1 = \\ = -\left| 0, a_{21}x_5a_{32}, -(a_{31}a_{32} + a_{32}a_{41}), -(a_{32}a_{42} + a_{41}^2), (a_{32}a_{52}\frac{x_6}{x_3^2}), -(a_{32}a_{62}x_2), 0 \right|^T; \end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2\boldsymbol{Y}_2 = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_2] = \frac{\partial \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_2}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_2 = \\ = \left| 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{a_{52}}{x_3},\ a_{61},\ 0 \right|^T. \end{gathered} \tag{25}$$

Из соотношения (12) $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y_1}}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\, T_1^1(\boldsymbol{x})) = 0$ имеем:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\, \mathrm{T}_1^1(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial\, \mathrm{T}_1^1}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_1 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\, \mathrm{T}_1^1}{\partial \boldsymbol{x}}, \left| 0 \quad 0 \quad -a_{32} \quad -a_{42} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right| \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_3}(-a_{32}) + \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_4}(-a_{41}) = 0.$$

Поскольку функция $\boldsymbol{T}_1^1(\boldsymbol{x})$ не зависит от x_4, то она не зависит и от x_3.

Теперь используем из соотношений (12) и (19) равенство $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\, T_1^1(\boldsymbol{x})) = 0$:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\, T_1^1(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_1^1}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_2 \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T_1^1}{\partial \boldsymbol{x}}, \left| 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \right| \right\rangle =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 6}}^{7} \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \cdot 0 + \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_6}(-1) = 0.$$

Отсюда следует, что $T_1^1(\boldsymbol{x})$ не зависит и от x_6 (а также и от x_3, x_4, x_7). Далее, используем последние два соотношения (12). В первую очередь берём более простое:

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2\, T_1^1(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 \boldsymbol{Y}_2 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}, \left\| 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{a_{52}}{x_3} \quad a_{61} \quad 0 \right\| \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial x_5} \cdot \frac{a_{52}}{x_3} = 0.$$

Отсюда следует, что $T_1^1(\boldsymbol{x})$ не зависит от x_5. Рассмотрим следующее соотношение из (12):

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2\, T_1^1(\boldsymbol{x})) = 0 = \left\langle \frac{\partial T_1^1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 \boldsymbol{Y}_1 \right\rangle .$$

Поскольку $T_1^1(\boldsymbol{x})$ может зависеть только от x_1 и x_2, а первая компонента производной $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 \boldsymbol{Y}_1$ нулевая, то $T_1^1(\boldsymbol{x})$ не зависит от x_2, то есть $T_1^1(\boldsymbol{x}^*) \equiv T_1^1(x_1)$. В качестве решения возьмём $T_1^1(x_1) = x_1$. Из этой функции, путём последовательного дифференцирования вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$ получим:

$$z_1 = T_1(x_1) = x_1;$$

$$z_2 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}} T_1^1(x_1) = a_{11} x_2;$$

$$z_3 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}} T_1^1(x_1)) = a_{11}(a_{27}x_1^3 + a_{26}x_1^2 + a_{25}x_1 + a_{24}x_2^2 + a_{23}x_2 + a_{22} + a_{21}x_3x_6);$$

$$z_4 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_1(x_1)) = a_{11}^2 x_2(3a_{27}x_1^2 + 2a_{26}x_1 + a_{25}) + a_{11}(a_{23} + 2a_{24}x_2)(a_{27}x_1^3 +$$
$$+ a_{26}x_1^2 + a_{25}x_1 + a_{24}x_2^2 + a_{23}x_2 + a_{22} + a_{21}x_3x_6) + a_{11}a_{21}x_3(x_7 + a_{61}x_6 +$$
$$+ a_{62}x_2x_3) + a_{11}a_{21}x_6(a_{31}x_3 + a_{32}x_4).$$

Непосредственная проверка неравенств (14) с помощью производных Ли $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 \boldsymbol{Y}_1$ и $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 \boldsymbol{Y}_2$ показывает, что неравенства выполняются. Таким образом, функция преобразования $T_1^1(\boldsymbol{x})$ определена. Аналогичным образом определяется и функция $T_2^1(\boldsymbol{x})$, а с её помощью – соотношения, связывающие переменные линейной модели в форме Бруновского z_5, z_6, z_7 с переменными исходного нелинейного объекта (1). Для проверки адекватности линейной модели было проведено моделирование различных процессов функционирования

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

объекта управления с помощью линейной и нелинейной моделей. Сопоставление результатов моделирования с помощью этих моделей показало их полное совпадение.

Теперь определим функцию преобразования $T_1^2(\boldsymbol{x})$ для объекта (4). Для второго объекта также можно записать уравнения вида (5) – (11), для определения функций преобразования $T_1^2(\boldsymbol{x})$, $T_2^2(\boldsymbol{x})$ связывающих переменные линейной и нелинейной моделей. Для второго объекта из уравнений вида (5) – (11) аналогично тому, как получены соотношения (12) и (13), (14) и (15) для определения функций преобразования $T_1^2(\boldsymbol{x})$, $T_2^2(\boldsymbol{x})$, несложно получить соотношения для определения функций преобразования $T_1^2(\boldsymbol{x})$ и $T_2^2(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_1^2(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_1^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_1^2(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_1^2(\boldsymbol{x})) = \\ &= \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2 T_1^2(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2 T_1^2(\boldsymbol{x})) = 0; \end{aligned} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_2^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_2^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_2^2(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_2^2(\boldsymbol{x})) = 0; \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^3 T_1^2(\boldsymbol{x})) &= \left\langle \frac{\partial T_1^2}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^3 Y_1 \right\rangle \neq 0; \\ \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^3 T_1^2(\boldsymbol{x})) &= \left\langle \frac{\partial T_1^2}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^3 Y_2 \right\rangle \neq 0; \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2 T_2^2(\boldsymbol{x})) &= \left\langle \frac{\partial T_2^2}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2 \boldsymbol{Y}_1 \right\rangle \neq 0; \\ \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2 T_2^2(\boldsymbol{x})) &= \left\langle \frac{\partial T_2^2}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2 \boldsymbol{Y}_2 \right\rangle \neq 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Соотношения (26) – (29) по аналогии с соотношения (12) – (15) содержат необходимые дифференциальные уравнения в частных производных для определения функций $T_1^2(\boldsymbol{x})$ и $T_2^2(\boldsymbol{x})$, которые, как и функции $T_1^1(\boldsymbol{x})$, $T_2^1(\boldsymbol{x})$, могут зависеть от семи аргументов $(x_1, x_2, ..., x_7)$. Используя первые два уравнения из выражения (26)

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_1^2(\boldsymbol{x}) = \left\langle \frac{\partial T_1^2}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{Y}_1 \right\rangle = 0;$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_1^2(\boldsymbol{x}) = \left\langle \frac{\partial T_1^2}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{Y}_2 \right\rangle = 0,$$

по аналогии с соотношениями (16), (17) нетрудно установить, что функция $T_1^2(\boldsymbol{x})$ не зависит от аргументов x_4 и x_7. Для дальнейшего уточнения функции $T_1^2(\boldsymbol{x})$ необходимо, как и при определении функции $T_1^1(\boldsymbol{x})$, знать производные Ли первого и второго порядка. Однако эти производные имеют в общем случае большее число ненулевых компонент. Например:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1 = [\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}_1] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_1}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{X}^* - \frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1 =$$

$$= -\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_4^*}{\partial x_1} & \frac{\partial g_4^*}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_4^*}{\partial x_7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_6^*}{\partial x_1} & \frac{\partial g_6^*}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_6^*}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_7}{\partial x_1} & \frac{\partial g_7}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_7}{\partial x_7} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{25} + 2a_{26}x_1 + 3a_{27}x_1^2 & a_{23} + 2a_{24}x_2 & a_{21}x_5 & 0 & a_{21}x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{42} & a_{41} & 0 & a_{43}x_2 & 0 \\ 0 & a_{51} & -a_{52}\frac{x_6}{x_3^2} & 0 & 0 & \frac{a_{52}}{x_3} & 0 \\ 0 & a_{62}x_3 + a_{63}x_4 & a_{62}x_2 & a_{62}x_2 & 0 & a_{61} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a_{32} & -a_{41} & 0 & -a_{63}x_2 & 0 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}; \tag{30}$$

Поэтому, если по аналогии с определением $T_1^1(\boldsymbol{x})$ использовать соотношение:

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\,T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a_{32} & -a_{42} & 0 & -a_{63}x_2 & 0 \end{vmatrix} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_3}(-a_{32}) + \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_4}(-a_{41}) + \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_6}(-a_{63}x_2) = 0,$$

то уже нельзя, как при определении $T_1^1(\boldsymbol{x})$, констатировать, что функция $T_1^2(\boldsymbol{x})$ не зависит от x_3 или x_6.

Таким образом, функция $T_1^2(\boldsymbol{x})$ в общем случае является функцией нескольких переменных и её определение существенно усложняется, поскольку возникает перспектива численного решения системы уравнений в частных производных. Однако, опыт применения геометрической теории показывает, что функции преобразования обычно имеют простой вид, например:

$$T_1^2(\boldsymbol{x}) = x_g \text{ или } T_1^2(\boldsymbol{x}) = x_g + x_{g1} \text{ или } T_1^2(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{k} x_{gj},$$

где x_g, x_{g1}, ..., x_{gk} $\in$ $\{x_{q1}, x_{q2}, ..., x_{ql}\}$, x_{qp} $(p = \overline{1, l})$ – переменные объекта управления, не исключенные на первом этапе определения функции преобразования.

Поэтому возможен автоматический перебор функций преобразования с помощью специальной нейронной сети [11].

Выводы: Сопоставление систем дифференциальных уравнений (1) и (4) показывает, что объект управления (4) отличается от объекта управления (1) только наличием двух дополнительных одночленов в четвертом и шестом дифференциальных уравнениях. Однако это существенно усложняет поиск функций преобразования, связывающих переменные системы линейных дифференциальных уравнений в форме Бруновского с переменными системы дифференциальных уравнений, описывающих исходный нелинейный объект с дополнительными одночленами.

Анализ рассматриваемых примеров показывает, что наиболее критично увеличение числа одночленов в уравнениях, в которые входят управления, поскольку даже один одночлен может увеличивать число ненулевых компонент в производных Ли первого и второго порядка и может приводить к численным методам решения системы уравнений в частных производных. Увеличение числа одночленов в уравнениях, в которые управления не входят, в большинстве случаев, не усложняют поиск функций преобразования.

Если функцию преобразования не удается получить как функцию одной переменной, тогда перспективным выглядит автоматический перебор функций преобразования с помощью специализированной нейронной сети.

Список литературы:

1. *Bloch A.M.* An Introduction to Aspects of Geometric Control Theory / *A.M. Bloch* // In: Krishnaprasad P., Murray R. (eds) Nonholonomic Mechanics and Control. Interdisciplinary Applied Mathematics, Vol 24. Springer, New York, NY. – P. 199-233.

2. *Freitas, C.B.N.* A Symbolic–Numerical Method for Integration of DAEs Based on Geometric Control Theory / *C.B.N. Freitas, P.S.P. da Silva* // Journal of Control, Automation and Electrical Systems. – 2014. – Vol. 25. – № 400. – São Paulo – SP – Brasil. https://doi.org/10.1007/s40313-014-0115-9.

3. *Краснощёченко В.Н.* Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / *В.И. Краснощёченко, А.П. Крищенко*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с.

4. *Kim D.P.* Automatic Control Nonlinear and Multivariable System / *D.P. Kim*. – Seal: Harnol, 2000. – 558 p.

5. *Сачков Ю.* Геометрическая теория управления / *Ю. Сачков*. – М.: СИНТЕГ, 2013. – 394 с.

6. *Аграчев, А.А.* Геометрическая теория управления / *А.А. Аграчев*. – М.: Физматлит, 2005. – 392 с.

7. *Заковоротный А. Ю.* Синтез автоматизированной системы управления подвижным составом на основе геометрической теории управления и нейронных сетей: дис. ... д-ра техн. наук: спец. 05.13.07 / *А. Ю. Заковоротный*; Нац. техн. ун-т "Харьков. политехн. ин-т". – Харьков, 2017. – 433 с.

8. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2 Многомерные нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: учебное пособие / *Д.П. Ким*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

9. *Дмитриенко В.Д.* Моделирование и оптимизация процессов управления движением дизель-поездов / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный*. – Харьков: НТМТ, 2013. – 248 с.

10. *Дмитриенко В.Д.* Исследование возможностей программных компонент бортовой вычислительной системы при преобразовании нелинейных систем к эквивалентным линейным / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный, Н.В. Мезенцев, Д.М. Главчев* // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ", 2018. – Вип. 24 (1300). – С.80-98.

11. *Дмитриенко В.Д.* Метод поиска функций преобразования, связывающих переменные нелинейных и линейных моделей в ГТУ / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный, Д.М. Главчев* // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ", 2016. – Вип. 44 (1216). – С.14-30.

References:

1. Bloch, A.M. (2015), *An Introduction to Aspects of Geometric Control Theory*. In: Krishnaprasad P., Murray R. (eds) Nonholonomic Mechanics and Control. Interdisciplinary Applied Mathematics, vol 24. Springer, New York, NY, pp. 199-233.

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

2. Freitas, C.B.N. & da Silva, P.S.P. (2014), "A Symbolic–Numerical Method for Integration of DAEs Based on Geometric Control Theory". *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* (2014) 25: 400, São Paulo - SP – Brasil. https://doi.org/10.1007/s40313-014-0115-9
3. Krasnoshechenko, V.N., and Krishenko, A.P. (2005), *Nonlinear systems: geometrical method of analysis and synthesis*, Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moskow, 520 p.
4. Kim, D.P. (2000), *Automatic Control Nonlinear and Multivariable System*. – Seal: Harnol, 2000, 558 p.
5. Sachkov, Y. (2013), *Geometric control theory*. – SYNTEG, Moscow, 394 p.
6. Agrachev, A.A. (2005), *Geometric control theory*. – Fizmatlit, Moscow, 392 p.
7. Zakovorotny, A.Y. (2017), *Synthesis of an automated control system for rolling stock on the basis of geometric control theory and neural networks*: dis. ... Dr. techn. Sciences: spec. 05.13.07 / Alexander Yuryevich Zakovorotny; NTU "Kharkov Polytechnic Institute". – Kharkov. – 433 p.
8. Kim, D.P. (2004), *Theory of automatic control. T. 2 Multidimensional nonlinear, optimal and adaptive systems*, FYSMATLIT, Moskow, 464 p.
9. Dmitrienko, V.D., and Zakovorotny, A.Y. (2013), *Modelling and optimization of management processes of diesel trains*, HTMT, Kharkiv, 248 p.
10. Dmitrienko V.D., Zakovorotny, A.Y., Mezentsev N.V., Hlavchev D.M. (2018) "The investigation of the capabilities of the the onboard computing system software component when converting nonlinear systems to equivalent linear". *Bulletin of NTU "KPI"*. – Kharkiv: NTU "KhPI", Vol. 24 (1300), pp.80-98.
11. Dmitrienko V.D., Zakovorotny, A.Y., Hlavchev D.M. (2018) "The method of searching for transformation functions that connect the variables of nonlinear and linear models in GCT". *Bulletin of NTU "KPI"*. – Kharkiv: NTU “KhPI”, Vol. 44 (1216), pp.14-30.

Статтю представив д.т.н., проф. Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" О.А. Серков

Надійшла (received) 11.10.2018

Dmitrienko Valerii, Dr. Tech. Sci., Professor
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel.: +38 (057) 707-61-98, e-mail: valdmitrienko@gmail.com
ORCID ID: 0000-0003-2523-595X

Zakovorotniy Alexandr, Dr. Tech. Sci., Docent
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel.: +38 (097) 967-32-71, e-mail: arcade@i.ua
ORCID ID: 0000-0003-4415-838X

Mezentsev Nickolay, Cand. Tech. Sci., Docent
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel.: +38 (098) 859-88-98, e-mail: besitzer@i.ua
ORCID ID: 0000-0001-7834-2797

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Dmytro Hlavchev, master
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel: +380993049807, e-mail: dmitriyglavchev@gmail.com
ORCID ID: 0000-0003-4248-4819

УДК 861.5.015.2

Дослідження методу пошуку функцій перетворення нелінійних систем до еквівалентних лінійних в геометричній теорії управління / Дмитрієнко В.Д., Заковоротний О.Ю., Мезенцев Н.В., Главчев Д.М. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2018. – № 42 (1318). – С. 20 – 35.

Один з факторів, що заважають розширенню сфери застосування геометричної теорії управління (ГТУ) – це необхідність, для визначення функцій перетворення, що зв'язують змінні лінійних і нелінійних моделей, вирішувати систему диференціальних рівнянь в часткових похідних при обмеженнях у вигляді диференціальних нерівностей. Вирішення цієї системи рівнянь в загальному випадку не є тривіальним завданням. У статті досліджується вплив виду правих частин системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують нелінійний об'єкт, на складність визначення функцій перетворення. Бібліогр.: 11 назв.

Ключові слова: геометрична теорія управління; функції перетворення; система диференціальних рівнянь в часткових похідних.

УДК 861.5.015.2

Исследование метода поиска функций преобразования нелинейных систем к эквивалентным линейным в геометрической теории управления / Дмитриенко В.Д., Заковоротный А.Ю., Мезенцев Н.В., Главчев Д.М. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2018. – № 42 (1318). – С. 20 – 35.

Один из факторов, мешающих расширению области применения геометрической теории управления, это необходимость для определения функций преобразования, связывающих переменные линейных и нелинейных моделей, решать систему дифференциальных уравнений в частных производных при ограничениях в виде дифференциальных неравенств. Решение этой системы уравнений в общем случае не является тривиальной задачей. В статье исследуется влияние вида правых частей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих нелинейный объект, на сложность определения функций преобразования. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: геометрическая теория управления; функции преобразования; система дифференциальных уравнений в частных производных.

UDK 861.5.015.2

Investigation of the search method for the transformation functions of nonlinear systems to equivalent linear ones in geometric control theory / Dmitrienko V.D., Zakovorotny A.Y., Mezentsev N.V., Hlavchev D.M. // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2018. – №.42 (1318). – P. 20 – 35.

One of the factors that prevent the expansion of the field of application of the geometric control theory (GCT) is the need to solve the system of partial differential equations with constraints in the form of differential inequalities for determining the transformation functions and connection between the variables of linear and nonlinear models. The solution of this system of equations in the general case is not a trivial task. The article investigates, the influence of the type of the right-hand sides of a system of ordinary differential equations, that describing a nonlinear object on the complexity of determining the transformation functions. Refs.: 11 titles.

Keywords: geometric control theory; transformation functions; system of partial differential equations.