Вісник Національного технічного університету "ХПІ", 2019, № 13 (1338)
ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

УДК 517.956.6 DOI: 10.20998/2411-0558.2019.13.01

А. А. АБДУЛЛАЕВ, асс. кафедры "Высшая математика", Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Одной из главных задач гидро и газовой динамики является разработка математических моделей стационарных процессов, описываемых уравнениями смешанного типа.

В данной работе изучается задача определения течения внутри плоскопараллельного симметричного сопла Лаваля заданной формы (прямая задача теории сопла Лаваля), т.е. для уравнения, где линия вырождения является характеристикой. Библиогр.: 8 назв.

Ключевые слова: задачи гидро и газовой динамики; сопло Лаваля; уравнения смешанного типа; уравнения эллиптико-гиперболического типа.

Постановка проблемы. Благодаря новым приложениям уравнений смешанного типа теория краевых задач получила новый импульс развития. Особенно важную роль в приложениях занимают краевые задачи для эллиптико-гиперболических уравнений (например, [1 – 4]). Задача Франкля и ее аналоги для смешанных эллиптико-гиперболических уравнений, а также локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода мало изучены. Доказать однозначную разрешимость таких краевых задач для уравнения второго рода не всегда удаётся. В данной работе впервые изучаются течения внутри плоскопараллельного симметричного сопла Лаваля заданной формы, т.е. аналог задачи Франкля с краевым условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, где линия вырождения тоже является характеристикой.

Анализ литературы. В [1] доказана однозначная разрешимость задачи Трикоми и показано ее применение к решению прямой задачи теории сопла Лаваля. В [2] получено решение нелокальной краевой задачи для уравнения эллиптического типа второго рода. В [3] рассмотрена задача Пуанкаре-Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода. В работе [4] доказана однозначная разрешимость задачи для уравнения третьего порядка смешанного типа второго рода, в [5] доказана однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи с конормальной производной для уравнения смешанного эллиптико-

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

гиперболического типа. В работах [6 – 8] приведены некоторые приложение уравнений смешанного типа теории краевых задач.

Цель статьи – доказать единственность решения задачи типа Франкля для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода.

Рассмотрим область *D*, изображенную на рисунке, где *AC* и *BC* – характеристики уравнения (1), а *Г* – спрямляемая Жорданова кривая, Ф.И. Франкль показал, что для обеспечения существования и единственности в области *D* решения *u*(*x*,*y*) уравнения

$$sign y|y|^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad (1)$$

при – 1 < *m* < – 2 уже недостаточно подчинить функцию *u*(*x*,*y*) краевым условиям

$$u|_{\Gamma} = \varphi(s), \qquad u|_{AC} = \psi(x),$$

а следует, сверх того, на отрезке *AB* линии перехода вместо обычного требования непрерывности $u_y(x, +0) = u_y(x, -0)$ ввести предположение (условие разрывности Франкля)

$$\frac{\partial u(x,+0)}{\partial y} = -\frac{\partial u(x,-0)}{\partial y}.$$

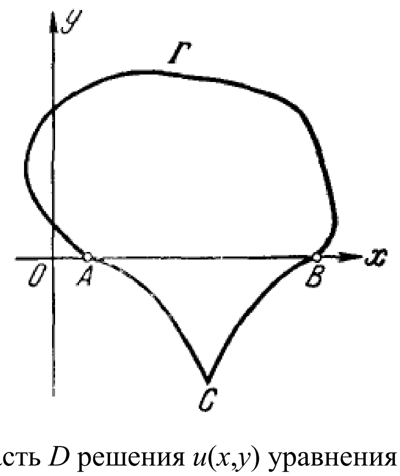

Рис. Область *D* решения *u*(*x*,*y*) уравнения (1)

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Этот результат обобщаем для значений $m \in (-2;\ -1)$ причём единственность доказываем тем же методом, а существование решения с помощью представления обобщенного решения [2 – 4] класса R_2 уравнения (1) для значений $-2 < m < -1$.

Теорема единственности.

Докажем теорему единственности в классе функций, удовлетворяющих условиям:

1) $u(x, y) \in C^{(2)}\left(D^{+} \cup D^{-}\right)$;

2) интегралы

$$\int_A^B u(x,0)\,u_y(x,0)dx, \quad \iint_{D^+} (y^m u_x^2 + u_y^2)dxdy\,,$$

и

$$\iint_{D^-} [(-y)^m u_x^2 - u_y^2]dxdy\,, \quad \int_C^B (-y)^{\frac{m-2}{2}} u^2 du$$

существуют, а к интегралам

$$\iint_{D^+} u(y^m u_{xx} + u_{yy})dxdy\,, \quad \iint_{D^-} u\,[(-y)^m u_{xx} - u_{yy}]dxdy$$

можно применить формулу Грина;

3) $(-y)^{\frac{m}{2}} u^2(B) = 0$.

Положим

$$\frac{\partial u(x,\ +0)}{\partial y} = -\frac{\partial u(x,\ -0)}{\partial y} = \nu(x).$$

Покажем предварительно, что если $u(x,y)$ есть решение уравнения (1), обращающееся в нуль на характеристике AC, то

$$\int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx \ge 0. \qquad (2)$$

В самом деле, для области D^- нижней полуплоскости справедливо равенство ($-1 < m < -2$)

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$0=\iint\limits_{D^-} u[(-y)^m u_{xx}-u_{yy}]dxdy=$$

$$=\int\limits_{AC}\int\limits_{BA} u[(-y)^m u_x dx+u_y dy]+\iint\limits_{D^-}[u_y^2-(-y)^m u_x^2]dxdy.$$

Отсюда, учитывая, что $u\big|_{AC}=0$, получим

$$\int\limits_0^1 \tau(x)\nu(x)dx=-\iint\limits_{D^-}[u_y^2-(-y)^m u_x^2]dxdy-\int\limits_C^B u[(-y)^m u_x dx+u_y dy]. \quad (3)$$

На характеристике *CB* имеем $dx=(-y)^{\frac{m}{2}}dy$. Тогда

$$\int\limits_C^B u\left[(-y)^m u_x dx+u_y dy\right]=\int\limits_C^B(-y)^{\frac{m}{2}}u\left(u_x dx+u_y dy\right)=\int\limits_C^B(-y)^{\frac{m}{2}}udu=$$

$$=\frac{1}{2}(-y)^{\frac{m}{2}}u^2(B)+\frac{m}{4}\int\limits_C^B(-y)^{\frac{m-2}{2}}u^2du$$

или, в силу (3),

$$\int\limits_C^B u\left[(-y)^m u_x dx+u_y dy\right]=\frac{m}{4}\int\limits_C^B(-y)^{\frac{m-2}{2}}u^2du\le 0\,. \quad (4)$$

Покажем, что первый интеграл в правой части равенства (3) не положителен. Для этого перейдем в плоскость характеристических координат

$$\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}},\quad \eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}.$$

Имеем

$$\iint\limits_{D^-}\left[u_y^2-(-y)^m u_x^2\right]dxdy=-2\iint\limits_{\Delta AB'C'}(-y)^{\frac{m}{2}}u_\xi u_\eta d\xi d\eta \quad (5)$$

В гиперболической полуплоскости уравнение (1) принимает вид [5]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0\,, \quad (6)$$

где $\beta=\dfrac{m}{2(m+2)}$.

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Из (6) имеем

$$u_\xi u_\eta = u_\eta^2 - \frac{\eta - \xi}{\beta} u_\eta u_{\xi\eta}. \qquad (7)$$

Подставив (7) в (5), получим

$$\iint\limits_{D^-} [u_y^2 - (-y)^m u_x^2] dxdy = -2\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}} \left[\iint\limits_{\Delta AB'C'} (\eta - \xi)^{\frac{m}{m+2}} u_\eta^2 d\xi d\eta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\beta} \iint\limits_{\Delta AB'C'} (\eta - \xi)^{\frac{2(m+1)}{m+2}} u_\eta u_{\xi\eta} d\xi d\eta \right]$$

или, интегрируя по частям последний интеграл, имеем

$$\iint\limits_{D^-} [u_y^2 - (-y)^m u_x^2] dxdy = \frac{2(m+2)}{m} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}} \iint\limits_{\Delta AB'C'} (\eta - \xi)^{\frac{m}{m+2}} u_\eta^2 d\xi d\eta \le 0. \quad (8)$$

Учитывая (4) и (8), из (3) получаем (2).

Теперь нетрудно доказать теорему единственности. Пусть $u(x,y)$ – решение уравнения (1), равное нулю на кривой Γ и на характеристике AC. Тогда

$$0 = \iint\limits_{D^-} u(y^m u_{xx} + u_{yy}) dxdy = -\iint\limits_{D^+} (y^m u_x^2 + u_y^2) dxdy - \int_0^1 \tau(x)\nu(x) dx -$$

$$- \int\limits_{\Gamma} u[y^m u_x \cos(nx) + u_y \cos(ny)] ds$$

и так как $u|_\Gamma = 0$, то получим

$$\iint\limits_{D^+} (y^m u_x^2 + u_y^2) dxdy + \int_0^1 \tau(x)\nu(x) dx = 0. \qquad (9)$$

Поскольку $u = 0$ на характеристике AC, то имеет место (2), а тогда из (9) легко заключаем, что $u \equiv 0$ в $D^+(y > 0)$. В силу единственности решения задачи Коши для уравнения (1) [2] получаем, что $u \equiv 0$ в $D^-(y < 0)$.

Таким образом, $u \equiv 0$ в D, что и требовалось доказать.

Выводы: Таким образом, в статье получены новые математические результаты, состоящие в доказательстве единственности решения задачи типа Франкля с краевым условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, которое используется для моделирования стационарных процессов течения внутри плоскопараллельного симметричного сопла Лаваля заданной формы. Полученный результат может использоватья и при моделировании других газовых и гидродинамических процессов.

Список литературы:

1. *Франкль Ф.И.* Обобщение задачи Трикоми и его применение к решению прямой задачи теории сопла Лаваля / *Ф.И. Франкль* // Матем. сб. – 1961. – Т. 54. – № 2. – С. 225-236.
2. *Islomov B.I.* On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition / *B.I. Islomov, A.A. Abdullayev* // NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS. – 2018. – 9 (3). – P. 307-318.
3. *Мамадалиев Н.К.* О разрешимости задачи Пуанкаре-Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода / *Н.К. Мамадалиев, А.А. Абдуллаев* // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – 2013. – № 19. – С. 81-86.
4. *Салахитдинов М.С.* О единственности решения задачи для одного уравнения третьего порядка смешанного типа второго рода / *М.С. Салахитдинов, А.А. Абдуллаев* // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии Наук. – 2011. – Т. 13. – № 2. – С. 9-11.
5. *Абдуллаев А.А.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода / *А.А. Абдуллаев, Н.М. Сафарбаева* // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ", 2018. – № 42 (1318). – С. 5-11.
6. *Khudayarov B.A.* Numerical simulation of nonlinear oscillations of a viscoelastic pipeline with fluid / *B.A. Khudayarov, F.Zh. Turayev* // Вестн. Томского. гос. университета. Математика и механика. – 2016. – 5 (43). – С. 90-98.
7. *Khudayarov B.A.* Nonlinear supersonic flutter for the viscoelastic orthotropic cylindrical shells in supersonic flow / *B.A. Khudayarov, F.Zh. Turaev* // Aerospace Science and Technology. – 2019. – 84. – P. 120-130.
8. *Khudayarov B.A.* Mathematical Simulation of Nonlinear Oscillations of Viscoelastic Pipelines Conveying Fluid / *B.A. Khudayarov, F.Zh. Turaev* // Applied Mathematical Modelling. – 2019. – 66. – P. 662-679.

References:

1. Frankl, F.I. (1961), "Generalization of the Tricomi problem and its application to the solution of the direct problem of the theory of a Laval nozzle", *Mat. compilation*, Vol. 54, No. 2, pp. 225-236.
2. Islomov, B.I., and Abdullayev, A.A. (2018), "On a problem for an elliptic type equation of the second kind with a conormal and integral condition", *NANOSYSTEMS: PHYSICS, CHEMISTRY, MATHEMATICS,* No. 9 (3), pp. 307-318.
3. Mamadaliev, N.K., and Abdullayev, A.A. (2013), "On the solvability of the Poincaré-Tricomi problem for a mixed-type equation of the second kind", *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Computer Science and Modeling*, No. 19, pp. 81-86.
4. Salakhitdinov, M.S., and Abdullayev, A.A. (2011), "On the uniqueness of the solution of the problem for a single third-order equation of mixed type of the second kind", *Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences,* Vol. 13, No 2, pp. 9-11.

5. Abdullayev, A.A., and Safarbaeva, N.M. (2018), "On a boundary value problem for a mixed type equation of the second kind", *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Computer Science and Modeling*, Kharkov, NTU "KhPI", No. 42 (1318), pp. 5-11.
6. Khudayarov, B.A., and Turayev, F.ZH. (2016), "Numerical simulation of nonlinear oscillations of a viscoelastic pipeline with fluid", *Bulletin of the Tomsk State Univ. Matematika i mekhanika*, No 5 (43), pp. 90-98.
7. Khudayarov, B.A. and Turayev, F.Zh. (2019), "Nonlinear supersonic flutter for the viscoelastic orthotropic cylindrical shells in supersonic flow", *Aerospace Science and Technology*, 84, pp. 120-130.
8. Khudayarov, B.A. and Turayev, F.Zh. (2019), "Mathematical Simulation of Nonlinear Oscillations of Viscoelastic Pipelines Conveying Fluid", *Applied Mathematical Modelling*, 66, pp. 662-679.

Статью представил доктор техн. наук, проф. Б.А. Худаяров, зав. кафедры "Высшая математика", Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент.

Поступила (received) 15.05.2019

Повторно 28.05.2019

Abdullayev Akmaljon Abdujalilovich,
Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers
Higher mathematics,
Str. Kari Niyaziy, 39, Tashkent, Uzbekistan, 100000,
Tel: +99893 397-12-39, e-mail: akmal09.07.85@mail.ru
ORCID ID: 0000-0002-4542-1226

УДК 517.956.6

Про єдиність рішення задачі типу Франкля для рівняння елліптіко-гіперболічного типу другого роду / Абдуллаєв А.А. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2019. – № 13 (1338). – С. 5 – 12.

Однією з головних задач гідро і газової динаміки є розробка математичних моделей стаціонарних процесів, які описуються рівняннями змішаного типу.

У даній роботі вивчається задача визначення течії всередині плоскопаралельного симетричного сопла Лаваля заданої форми (пряма задача теорії сопла Лаваля), тобто для рівняння, де лінія виродження є характеристикою. Бібліогр.: 8 назв.

Ключові слова: задачі гідро і газової динаміки; сопло Лаваля; рівняння змішаного типу; рівняння елліптіко-гіперболічного типу.

УДК 517.956.6

О единственности решения задачи типа Франкля для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода / Абдуллаев А.А. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2019. – № 13 (1338). – С. 5 – 12.

Одной из главных задач гидро и газовой динамики является разработка математических моделей стационарных процессов, описываемых уравнениями смешанного типа.

В данной работе изучается задача определения течения внутри плоскопараллельного симметричного сопла Лаваля заданной формы (прямая задача теории сопла Лаваля), т.е. для уравнения, где линия вырождения является характеристикой. Библиогр.: 8 назв.

Ключевые слова: задачи гидро и газовой динамики; сопло Лаваля; уравнения смешанного типа; уравнения эллиптико-гиперболического типа.

UDC 517.956.6

On the uniqueness of the solution of a Frankl-type problem for an equation of the elliptic-hyperbolic type of the second kind / Abdullaev AA. // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2019. – №.13 (1338). – P. 5 – 12.

One of the main tasks of hydro and gas dynamics is the development of mathematical models of stationary processes described by equations of mixed type.

In this paper, we study the problem of determining the flow inside a plane-parallel symmetric Laval nozzle of a given shape (the direct problem of the theory of a Laval nozzle), i.e. for the equation, where the line of degeneration is characteristic. Refs.: 8 titles.

Keywords: hydro and gas dynamics problems; Laval nozzle; equations of mixed type; equations of elliptic-hyperbolic type.