УДК 539.3

А.Ф. ВЕРЛАНЬ, д-р техн. наук, Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины, Киев,
Б.А. ХУДАЯРОВ, д-р техн. наук, зав. каф., Ташкентский институт ирригации и мелиорации, Ташкент,
Э.Ф. ФАЙЗИБОЕВ, проф., Ташкентский институт ирригации и мелиорации, Ташкент,
З.У. ЮЛДАШЕВ, ст. преп., Ташкентский институт ирригации и мелиорации, Ташкент

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФЛАТТЕРА ВЯЗКОУПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

В работе рассматривается нелинейный флаттер вязкоупругих ортотропных пластин в сверхзвуковом потоке газа. Уравнения движения получены на основе наиболее общей теории пластин Фёппля-Кармана в перемещениях, для которых справедливы гипотезы Кирхгоффа. Аэродинамическое давление учитывается согласно поршневой теории А.А. Ильюшина. При помощи метода Бубнова – Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации перемещений, задача сведена к исследованию системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ), где независимой переменной является время. Решение ИДУ находится численным методом, основанным на использовании квадратурных формул. Разработаны методика и алгоритм численного решения интегро-дифференциальных уравнений. Определены критические скорости флаттера ортотропных пластин в потоке газа. Табл.: 1. Библиогр.: 9 назв.

Ключевые слова: вязкоупругая ортотропная пластина, алгоритм, интегро-дифференциальное уравнение, флаттер, пластина.

Постановка проблемы и анализ литературы. Большинство конструктивных элементов летательного аппарата, покрытых тонкой обшивкой, можно схематизировать либо в виде прямоугольных, либо в виде цилиндрических панелей или оболочек. Различие в геометрии этих элементов не является чисто формальным признаком и в значительной степени обуславливает специфику их аэроупругого поведения. В силу этого задачи моделирования панельного флаттера можно разбить на две большие группы. Первая включает задачи, относящиеся к плоским пластинам, вторая содержит задачи, связанные с цилиндрическими панелями и оболочками. Математическому моделированию флаттера упругих элементов второй группы посвящено большое количество теоретических исследований. Однако моделированию задач флаттера вязкоупругих пластин, цилиндрических и пологих оболочек посвящено сравнительно небольшое количество работ. Последнее объясняется специфическими аналитическими трудностями исследования пластин, цилиндрических и пологих оболочек. Потребности новой техники, в особенности бурно развивающейся авиационной промышленности за последние пятьдесят лет, определили необходимость развития нелинейной теории пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа.

В настоящее время задача учета наследственных эффектов деформируемых материалов представляет большой теоретический и прикладной интерес. Ее решение представляет собой эффективное приложение теории вязкоупругости к реальным процессам. Поэтому методы и проблемы теории наследственной упругости привлекают большое внимание исследователей.

Математическое моделирование динамических задач о колебаниях и устойчивости вязкоупругих систем является также весьма актуальным в связи с тем, что, с одной стороны, расширяются возможности использования в авиационной промышленности и других отраслях машиностроения материалов, обладающих ярко выраженными вязкоупругими свойствами, а с другой стороны, при использовании наследственных моделей [1 – 4] для описания внутреннего демпфирования материала уравнения колебаний упругих систем записываются в такой же форме, как и для вязкоупругих систем. Часто при рассмотрении упругих систем внутреннее трение материала учитывается с помощью модели Фойгта, хотя известно, что даже в системах с конечным числом степеней свободы, большим единицы, она приводит к некорректным результатам, поскольку для большинства материалов внутреннее трение фактически не зависит или, по крайней мере, слабо зависит от скорости колебаний в достаточно широком частотном диапазоне. В этом смысле более предпочтительной является модель, отображающая наследственные свойства [5].

Задача нелинейного флаттера ортотропной прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа была впервые рассмотрена в работе [6], где для аэродинамических сил использовалась приближенная формула "поршневой теории". В работе [7] задача решается в нелинейной постановке для трехслойной ортотропной пластинки. Позднее [8] эта задача рассматривалась для упругих ортотропных панелей, а динамический процесс рассмотрен без учета распространения упругих волн, однако в вязкоупругой постановке задача не исследована.

В связи с этим **целью данной статьи** и является теоретическое исследование нелинейного флаттера вязкоупругих ортотропных пластин, обтекаемых в потоке газа.

Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную вязкоупругую ортотропную пластинку со сторонами a и b, которая обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа со скоростью V. Аэродинамическое давление учитываем по поршневой теории А.А. Ильюшина [2].

Нелинейные уравнения движения вязкоупругих ортотропных пластин выпишем в виде:

$$B_{11}^*\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+B_{12}^*\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+$$
$$+B^*\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{1}$$

$$B_{22}^*\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+B_{21}^*\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+$$
$$+B^*\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0, \tag{2}$$

$$\frac{h^2}{12}\left\{B_{11}^*\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\left[8B^*+B_{12}^*+B_{21}^*\right]\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+B_{22}^*\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\left[B_{11}^*\frac{\partial u}{\partial x}+B_{12}^*\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial w}{\partial y}B^*\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial w}{\partial y}\left[B_{21}^*\frac{\partial u}{\partial x}+B_{22}^*\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial w}{\partial x}B^*\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}+ \tag{3}$$
$$+\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{B}{h}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{BV}{h}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{B_1V^2}{h}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=0,$$

где $B_{ij}^*=b_{ij}(1-R_{ij}^*)$; $(i,\ j\ =\ 1,\ 2)$; $B^*=b(1-R^*)$; R_{ij}^*, R^* – интегральные операторы: $R^*\varphi(t)=\int\limits_0^t R\ (t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$, $R_{ij}^*\varphi(t)=\int\limits_0^t R_{ij}(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$; $R(t-\tau)$, $R_{ij}(t-\tau)$ – ядра релаксации, определяемые при рассмотрении одноосной задачи; ρ – плотность материала; h – толщина оболочки.

Граничные условия будут иметь вид:

$w = 0;\ v = 0;\ N_x = 0;\ M_x = 0$ при $x = 0,\ x = a$;
$w = 0;\ u = 0;\ N_y = 0;\ M_y = 0$ при $y = 0,\ y = b$.

Этим условиям удовлетворим, представляя искомые функции $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$ в виде

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\ \sum_{m=1}^{M}u_{nm}(t)\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

$$v(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\ \sum_{m=1}^{M}v_{nm}(t)\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}, \tag{4}$$

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\ \sum_{m=1}^{M}w_{nm}(t)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\ .$$

Исследуем случай пластинки, шарнирно опертой по контуру, совершающей колебания с образованиям n и m полуволн вдоль координатных линий x и y. Решение уравнений (1) – (3), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать в виде (4). Подставляя (4) в систему (1) – (3) и применяя метод Бубнова-Галеркина, получим систему ИДУ. Введя в ИДУ следующие безразмерные величины $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{u}{h}, \frac{v}{h}, \frac{w}{h}, \frac{V_\infty t}{a}$, и сохраняя при этом прежние обозначения, запишем

$$\ddot{u}_{kl}+(a_{10}C_{11}^{*}+a_{11}C^{*})u_{kl}+(a_{12}C_{12}^{*}+a_{13}C^{*})v_{kl}+$$
$$+\sum_{n,i=1}^{N}\ \sum_{m,r=1}^{M}\Big[(a_{16}C_{11}^{*}+a_{17}C^{*})\Delta_{1klnmir}-(a_{18}C_{12}^{*}+a_{19}C^{*})\Delta_{2klnmir}\Big]w_{nm}w_{ir}=0, \tag{5}$$

$$\ddot{v}_{kl}+(a_{20}C_{22}^{*}+a_{21}C^{*})v_{kl}+(a_{22}C_{21}^{*}+a_{23}C^{*})u_{kl}+$$
$$+\sum_{n,i=1}^{N}\ \sum_{m,r=1}^{M}\Big[(a_{26}C_{22}^{*}+a_{27}C^{*})\Delta_{3klnmir}-(a_{28}C_{21}^{*}+a_{29}C^{*})\Delta_{4klnmir}\Big]w_{nm}w_{ir}=0, \tag{6}$$

$$\ddot{w}_{kl}+M\dot{w}_{kl}+(a_{30}C_{11}^{*}++a_{31}C_{12}^{*}+a_{32}C_{22}^{*}+a_{33}C^{*})w_{kl}+\sum_{n,i=1}^{N}\ \sum_{m,r=1}^{M}b_{2klnmir}C_{12}^{*}w_{nm}w_{ir}+$$
$$+\sum_{n,i=1}^{N}\ \sum_{m,r=1}^{M}w_{nm}\Big\{(d_{1klnmir}C_{11}^{*}+d_{2klnmir}C_{21}^{*}+d_{3klnmir}C^{*})u_{ir}+(d_{4klnmir}C_{12}^{*}+$$
$$+d_{5klnmir}C_{22}^{*}+d_{6klnmir}C^{*})v_{ir}+(d_{7klnmir}C_{11}^{*}+d_{8k\lambda\nu mir}C_{12}^{*}+d_{9klnmir}C_{22}^{*})w_{ir}\Big\}+ \tag{7}$$
$$+\aleph\lambda M_{p}\left(2\lambda_{1}M^{*}\sum_{n=1}^{N}\gamma_{nk}w_{nl}+\frac{\aleph+1}{4}M^{*^{2}}\sum_{n,i=1}^{N}\ \sum_{m,r=1}^{M}\Gamma_{klnmir}w_{nm}w_{ir}\right)=0,$$

где

$$a_{10}=\pi^2k^2\Delta;\quad a_{11}=\pi^2l^2\lambda^2g;\quad a_{12}=\pi^2kl\lambda\Delta;\quad a_{13}=\pi^2kl\lambda g;$$

$$a_{16}=\pi ni^2\Delta/\lambda_1;\quad a_{17}=\pi nr^2\lambda^2g/\lambda_1;\; a_{18}=\pi mir\lambda^2\Delta/\lambda_1;$$

$$a_{19}=\pi mir\lambda^2g/\lambda_1;\quad a_{20}=\pi^2\lambda^2l^2/\Delta;\quad a_{21}=\pi^2k^2g;\quad a_{22}=\pi^2\lambda kl/\Delta;$$

$$a_{23}=\pi^2kl\lambda g;\quad a_{26}=\pi\lambda^3r^2m/(\Delta\lambda_1);\quad a_{27}=\pi mi^2\lambda g/\lambda_1;$$

$$a_{28}=\pi\lambda nir/(\Delta\lambda_1);\quad a_{29}=\pi nir\lambda g/\lambda_1;$$

$$a_{30}=\frac{\pi^4k^4\Delta}{12\lambda_1^2};\quad a_{31}=\frac{\lambda^4\pi^4\Delta}{6\lambda_1^2};\quad a_{33}=\frac{\lambda^4\pi^4g}{3\lambda_1^2};\quad a_{32}=\frac{1}{\Delta}\frac{\lambda^4\pi^4l^4}{12\lambda_1^2};$$

$$d_{1klnmir}=\lambda_1ni\Delta\pi(n\Delta_{7klnmir}+i\Delta_{5klnmir});\qquad d_{5klnmir}=\lambda^2mi(r\Delta_{6klnmir}-$$
$$-m\Delta_{7klnmir})/(\Delta\lambda_1);\quad d_{2klnmir}=\beta_1n\Delta k_x(i\Delta_{5klnmir}-n\Delta_{7klnmir});$$

$$d_{3klnmir}=r\lambda^2\Delta\pi(im\Delta_{6klnmir}+nr\Delta_{5klnmir}-2nr\Delta_{8klnmir})/\lambda_1;\quad d_{8klnmir}=\lambda^2mr\pi\times$$
$$\times(\lambda r\Delta_{6klnmir}-m\Delta_{7k\ln mir})/(\Delta\lambda_1);\; d_{9klnmir}=m\lambda^2(\lambda_1rk_y\Delta_{6klnmir}-m\beta_1k_x\Delta_{7klnmir})/\Delta;$$

$$d_{6klnmir}=(\;-nmrg\pi\lambda\Delta_{8klnmir}(\lambda+1)+mir\pi g\lambda^2\Delta_{6klnmir}+nr^2\pi g\lambda^2\Delta_{5klnmir}\;)/\lambda_1;$$

$$d_{7klnmir}=(\;-nmig\pi\lambda\Delta_{8klnmir}(\lambda+1)+mi^2\pi g\lambda\Delta_{6klnmir}+nir\pi g\lambda\Delta_{5klnmir}\;)/\lambda_1;$$

$$d_{4klnmir}=n\beta_1k_y\Delta(i\Delta_{5klnmir}-n\Delta_{7klnmir})+m\lambda^2k_x(r\beta_1\Delta_{6klnmir}-m\Delta_{7klnmir}/\lambda_1)/\Delta;$$

$$C_{11}^*=\frac{1-R_{11}^*}{1-\mu_1\mu_2};\quad C_{12}^*=\frac{\mu_2(1-R_{12}^*)}{1-\mu_1\mu_2};\quad C_{21}^*=\frac{\mu_1(1-R_{21}^*)}{1-\mu_1\mu_2};$$

$$C_{22}^*=\frac{1-R_{12}^*}{1-\mu_1\mu_2};\quad C^*=1-R^*;\quad \Delta=\sqrt{\frac{E_1}{E_2}};\; g=\frac{G}{\sqrt{E_1E_2}}.$$

Требуется найти критическую скорость флаттера $V_{кр}$, из решения системы ИДУ (5) – (7), удовлетворяющую начальным условиям:

$$u_{nm}(0)=u_{0nm},\ \dot{u}_{nm}(0)=\dot{u}_{0m},\ v_{nm}(0)=v_{0nm},\ \dot{v}_{nm}(0)=\dot{v}_{0m}\ \ w_{nm}(0)=w_{0nm},,$$
$$\dot{w}_{nm}(0)=\dot{w}_{0m}.$$

Для решения задачи нелинейного флаттера вязкоупругих ортотропных пластинок, описываемой системой ИДУ (5) – (7), используем численный метод, основанный на применении квадратурных формул [9, 10].

Интегрируя систему (5) – (7) два раза по t, запишем ее в интегральной форме и с помощью рационального преобразования исключим слабо-сингулярние особенности интегрального оператора R^*. Затем, полагая $t = t_i$, $t_i = i\Delta t$, i = 1, 2, ... ($\Delta t = const$) и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления $u_{ikl} = u_{kl}(t_i)$, $v_{ikl} = v_{kl}(t_i)$ и $w_{ikl} = w_{kl}(t_i)$, получим следующие рекуррентные формулы для ядра Колтунова – Ржаницына:

$$
\begin{aligned}
u_{pkl} = u_{0kl} + \dot{u}_{okl}\, t_p - \sum_{j=0}^{p-1} A_j (t_p - t_j) \Bigg\{ a_{10} \left(u_{jkl} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) u_{j-skl} \right) + \\
+ \frac{a_{11}}{\mu_{12}} \left(u_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-skl} \right) + \frac{a_{13}}{\mu_{12}} \left(v_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-skl} \right) + \\
+ a_{12}\mu_2 \left(v_{jkl} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) v_{j-skl} \right) + \\
+ \sum_{n,i=1}^{N} \sum_{m,r=1}^{M} \Bigg[\Delta_{1klnmir} a_{16} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) + \\
+ \Delta_{1klnmir} \frac{a_{17}}{\mu_{12}} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\
- \Delta_{2klnmir} a_{18}\mu_2 \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\
- \Delta_{2klnmir} \frac{a_{19}}{\mu_{12}} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) \Bigg] \Bigg\} \mu_{12} = 0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
v_{pkl} = v_{0kl} + \dot{v}_{okl}\, t_p - \sum_{j=0}^{p-1} A_j (t_p - t_j) \Bigg\{ a_{20} \left(v_{jkl} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) v_{j-skl} \right) + \\
+ \frac{a_{21}}{\mu_{12}} a_{21} \left(v_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-skl} \right) + \frac{a_{23}}{\mu_{12}} \left(u_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-skl} \right) + \\
+ a_{22}\mu_1 \left(u_{jkl} - \frac{A_{21}}{\alpha_{21}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(21)} \exp(-\beta_{21} t_s) u_{j-skl} \right) + \\
+ \sum_{n,i=1}^{N} \sum_{m,r=1}^{M} \Bigg[\Delta_{3klnmir} a_{26} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) + \\
+ \Delta_{3klnmir} \frac{a_{27}}{\mu_{12}} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\
- \Delta_{4klnmir} a_{28}\mu_1 \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{21}}{\alpha_{21}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(21)} \exp(-\beta_{21} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) - \\
- \Delta_{4klnmir} \frac{a_{29}}{\mu_{12}} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) \Bigg] \Bigg\} \mu_{12} = 0,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{pkl} = {} & \frac{\mu_{12}}{1 + A_p M_\lambda} \Biggl\{ w_{0kl} + \left(\dot{w}_{0kl} + M_\lambda w_{0kl} \right) t_p - \sum_{j=0}^{p-1} A_j \Biggl(M_p\, w_{jkl} - \\
& - (t_p - t_j) \Biggl[\frac{\aleph \lambda M_p}{\mu_{12}} \left(2\lambda_1 M^* \sum_{n=1}^{N} \gamma_{kn} w_{jnl} + \frac{\aleph + 1}{4} M^{*2} \sum_{n,i=1}^{N} \sum_{m,r=1}^{M} \Gamma_{klnmir} w_{jnm} w_{jir} \right) + \\
& + a_{30} \left(w_{jkl} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) w_{j-skl} \right) + a_{31} \mu_2 \left(w_{jkl} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) w_{j-skl} \right) + \\
& + a_{32} \left(w_{jkl} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) w_{j-skl} \right) + \frac{a_{33}}{\mu_{12}} \left(w_{jkl} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-skl} \right) + \\
& + \sum_{n,i=1}^{N} \sum_{m,r=1}^{M} \mu_2 b_{2klnmir} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) + \\
& + \sum_{n,i=1}^{N} \sum_{m,r=1}^{M} w_{jnm} \Biggl\langle d_{1klnmir} \left(u_{jir} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) u_{j-sir} \right) + \\
& + \mu_1 d_{2k\ln mir} \left(u_{jir} - \frac{A_{21}}{\alpha_{21}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(21)} \exp(-\beta_{21} t_s) u_{j-sir} \right) + \frac{d_{3klnmir}}{\mu_{12}} \Biggl(u_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s \times \\
& \times \exp(-\beta t_s) u_{j-sir} \Biggr) + \mu_2 d_{4klnmir} \left(v_{jir} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) v_{j-sir} \right) + \\
& + d_{5klnmir} \left(v_{jir} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) v_{j-sir} \right) + \frac{d_{6klnmir}}{\mu_{12}} \Biggl(v_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^{j} B_s \times \\
& \times \exp(-\beta t_s) v_{j-sir} \Biggr) + \mu_2 d_{8klnmir} \left(w_{jir} - \frac{A_{12}}{\alpha_{12}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(12)} \exp(-\beta_{12} t_s) w_{j-sir} \right) + \\
& + d_{7rlnmir} \left(w_{jir} - \frac{A_{11}}{\alpha_{11}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(11)} \exp(-\beta_{11} t_s) w_{j-sir} \right) + d_{9klnmir} \left(w_{jir} - \frac{A_{22}}{\alpha_{22}} \sum_{s=0}^{j} B_s^{(22)} \exp(-\beta_{22} t_s) w_{j-sir} \right) \Biggr\rangle \Biggr] \Biggr) \Biggr\},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $p = 1, 2, \ldots; k = \overline{1, N}; l = \overline{1, M}$.

На основе этого алгоритма создан пакет прикладных компьютерных программ. Результаты вычислений представлены в таблице.

Таблица

Зависимость критической скорости флаттера от физико-механических и геометрических параметров пластинки

Δ	g	μ_1	μ_2	λ	λ_1	материал панели	V_{kp}
5,0129 4,8482 3,0976 2,2761 2,1467	1,1088 0,0226 0,1549 0,1398 0,1356	0,3 0,26 0,02 0,15 0,13	0,012 0,017 0,32 0,01963 0,023	2,5	50	вязкоупругий	980 892 615 463 440
5,0129	1,1088	0,3	0,012	2,1 2,3 2,6 2,8	50	вязкоупругий	532 734 1124 1433
5,0129	1,1088	0,3	0,012	2,5	40 45 50	вязкоупругий	1022 725 532
5,0129	1,1088	0,3	0,012	2,5	50	вязкоупругий	985 1062 1341
2,2761	0,1398	0,15	0,01963	2,5	50	упругий вязкоупругий	625 463

Проведены расчеты для вязкоупругих ортотропных пластин применительно к пяти маркам стеклопластика: $\Delta = 5{,}0129$; $g = 1{,}1088$; $\mu_1 = 0{,}3$; $\mu_2 = 0{,}012$ (марка 1); ($\Delta = \sqrt{\dfrac{E_1}{E_2}}$; $g = \dfrac{G}{\sqrt{E_1 E_2}}$; E_1, E_2 – линейные модули упругости; G – модуль сдвига; μ_1, μ_2 – коэффициенты Пуассона); $\Delta = 4{,}8482$; $g = 0{,}0226$; $\mu_1 = 0{,}26$; $\mu_2 = 0{,}017$ (марка 2); $\Delta = 3{,}0976$; $g = 0{,}1549$; $\mu_1 = 0{,}02$; $\mu_2 = 0{,}32$ (марка 3); $\Delta = 2{,}2761$; $g = 0{,}1398$; $\mu_1 = 0{,}15$; $\mu_3 = 0{,}01963$ (марка 4); $\Delta = 2{,}1467$; $g = 0{,}1356$; $\mu_1 = 0{,}13$; $\mu_2 = 0{,}023$ (марка 5). Результаты расчета для этих марок стеклопластика представлены в первых пяти строках таблицы. Видно, что критическая скорость (при постоянных λ и λ_1) сильно зависит от свойств материала.

Изучено влияние вязкоупругих свойств пластинки для марки 4. Критическая скорость для упругой пластинки составляет 625 м/с, а для вязкоупругой пластинки 463 м/с. Разница между ними составляет 25,9%.

Исследовалось влияние параметра λ (отношение длины стороны a к b) на критическую скорость флаттера вязкоупругих ортотропных пластин, материал которых относится к стеклопластикам марки 1. С ростом параметра λ увеличивается протяженность пластины в направлении течения и происходит сближение удлиненных краев пластины. Последнее способствует повышению относительной жесткости и росту критической скорости, которое можно проследить по табл. При λ = 2,1 эта скорость равна 532 м/с. С увеличением параметра λ до 2,8, критическая скорость возрастает в 2,69 раза.

Далее исследовано влияние параметра относительной толщины λ_1 (отношение стороны a к толщине h пластинки) на критическую скорость флаттера. Для λ_1= 40, 45 и 50 значения V_{kp} соответственно равны 1022, 725 и 532, то есть с уменьшением толщины стенок пластинки (с увеличением параметра λ_1) критическая скорость флаттера уменьшается.

Выводы. На основании полученных результатов можно заключить, что учет вязкоупругих свойств материала пластинки приводит к уменьшению критической скорости флаттера V_{kp}, с которой начинается явление флаттера.

Отметим также, что при скорости потока меньшей, чем V_{kp}, влияние вязкоупругого свойства материала уменьшает амплитуду и частоту колебаний. Если же скорость потока превышает V_{kp}, то вязкоупругое свойство материала оказывает уже дестабилизирующее влияние.

Список литературы: **1.** *Григолюк Э.И.* Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций // *Э.И. Григолюк, В.И. Мамай.* – М.: Наука: Физматлит, 1997. – 272 с. **2**. *Ильюшин А.А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // *А.А. Ильюшин* // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. XX. – Вып. 6. – С. 733–755. **3**. *Кочнева Л.Ф.* Внутреннее трение в твердых телах при колебаниях // *Л.Ф. Кочнева*. – М.: Наука, 1979. – 96 с. **4**. *Сорокин Е.С.* Об учете упругих несовершенств материалов методами наследственной упругости // *Е.С. Сорокин, Г.Б. Муравский*. – Строит. механика и расчет сооружений. – 1975. – № 4. – С. 41–46**. 5**. *Потапов В.Д.* Исследование динамической устойчивости вязко-упругих систем с помощью показателей Ляпунова // *В.Д. Потапов*. – Известия АН. Механика твердого тела. – 2000. – № 6. – С. 82–90. **6**. *Амбарцумян С.А.* Об устойчивости ортотропных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа // *С.А. Амбарцумян, Ж.Е. Багдасарян*. – Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. – 1961. – № 4. – С. 91–96. **7**. *Багдасарян Ж.Е.* Об устойчивости трехслойной ортотропной пластинки в сверхзвуковом потоке газа // *Ж.Е. Багдасарян*. – Известия АН Арм. ССР, Физико–математические науки. – 1961. – XIV. – № 5. – С. 21–29. **8**. *Jehad F.A.* Nonlinear Flutter of Orthotropic Composite panel Under Aerodynamic Heating // *F.A. Jehad, R.A. Ibrahim, F.G. Ronald*. – J. AIAA. – 1993. – Vol. 31. – № 8. – P. 1256–1268. **9.** *Бадалов Ф.Б.* О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // *Ф.Б. Бадалов, Х. Эшматов, М. Юсупов*. – Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51. – № 5. – С. 867-871. **10.** *Верлань А.Ф.* Численное решение нелинейных задач динамики вязкоупругих систем // *А.Ф. Верлань, Х. Эшматов, Б. Худаяров, Ш.П. Бобоназаров*. – Электронное моделирование. – 2004. – Т. 26. – № 3. – С. 3–14.

УДК 539.3

Комп'ютерне моделювання флаттеру в'язкопружних ортотропных пластин в надзвуковому потоці газу / Верлань А.Ф., Худаяров Б.А., Файзибоев Е.Ф., Юлдашев З.У. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2012. – № 62 (968). – С. 8 – 17.

У роботі розглядається нелінійний флаттер в'язкопружних ортотропных пластин у надзвуковому потоці газу. Рівняння руху отримані на основі найбільш спільної теорії пластин Феппля-кармана в переміщеннях, для яких справедливі гіпотези Кірхгофа. Аеродинамічний тиск враховується згідно поршневої теорії А.А. Іл'юшина. За допомогою методу Бубнова-Галеркіну, заснованого на багаточленній апроксимації переміщень, завдання зведене до дослідження системи звичайних інтегро-дифференційних рівнянь (ІДУ), де незалежною змінною є час. Рішення ІДУ знаходиться чисельним методом, заснованим на використанні квадратурних формул. Розроблені методика і алгоритм чисельного рішення інтегро-дифференційних рівнянь. Визначені критичні швидкості флаттеру ортотропных пластин у потоці газу. Табл.: 1. Бібліогр.: 10 назв.

Ключові слова: в'язкопружні ортотропні пластини, алгоритм, інтегро-дифференційне рівняння, флаттер, пластина.

UDC 539.3

Computer modeling of flutter of viscoelastic orthotropic plates in supersonic flow / Verlan A.F., Khudayarov B.A., Fayziboyev E.F., Yuldashev Z.U. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modeling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2012. – №. 62 (968). – P. 8 – 17.

This paper considers the nonlinear flutter of viscoelastic orthotropic plates in supersonic flow. The equations of motion derived from the most general theory of plates Foppl-Karman in displacements, which satisfy the Kirchhoff hypothesis. Aerodynamic pressure is accounted for under the piston theory A.A. Ilyushin. Using the Bubnov - Galerkin method based on polynomial approximation of displacements, the problem is reduced to the study of a system of ordinary integro-differential equations (IDE), where the independent variable is time. The IDE is a numerical method based on quadrature formulas. The technique and algorithm for the numerical solution of integro-differential equations. The critical velocity of flutter of orthotropic plates in a gas stream.Computional experiment in task about flutter of viscoelastic plate, streamlined under arbitrary corner, in stream of gas. Tabl.: 1. Refs.: 10 titles.

Keyworts: viscoelastic orthotropic plates, algorithm, integro-differential equations, flutter, plates.

Поступила в редакцию 06.08.2012