УДК 371

Ю.Н. МИЦАЙ, д-р. физ.-мат. наук, проф., Крымский гуманитарный університет, Ялта,
А.Н. МАЙОРОВА, канд. физ.-мат. наук, Крымский гуманитарный університет, Ялта

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КВАНТОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ

В работе построена математическая модель редукции волновой функции. В основу модели положены идеи, развитые Климонтовичем, и применен метод стохастического квантования в формулировке Пригожина. Предложено уравнение, учитывающее неопределенность начального квантового состояния. Из этого уравнения получено уравнение Фоккера-Планка, решения которого и свидетельствуют о наличии редукции. Библиогр.: 9 назв.

Ключевые слова: математическая модель, квантовое измерение, волновая функция, редукция.

Постановка проблемы. В связи с развитием квантовой информатики [1] проблема квантовой теории измерений, поставленная как одна из трех великих проблем теоретической физики 21 века еще В.Л. Гинзбургом, стала вновь актуальной. В области прикладных исследований – квантовой информатике, работают принципы, лежащие в основе теории квантовых измерений. Прикладной характер квантовой информатики и многообещающие перспективы построения приборов на ее основе привели к тому, что в последнее время вопросы квантовой теории измерений и интерпретации квантовой механики вновь активно развиваются.

Со времен знаменитой работы Эйнштейна, Подольского и Розена становится все более понятно, что дать интерпретацию квантовой механики – значит объяснить, как в квантовой механике понимается реальность. Использовать ту или иную интерпретацию – значит объяснять квантовую реальность тем или иным способом. Это можно делать на разных уровнях. Более простые уровни (к которым относится копенгагенская интерпретация) довольно легки для восприятия и удобны для практического применения, но они недостаточно точно передают смысл квантовой реальности. Более серьезные уровни (в том числе интерпретация Эверетта [2]) передают этот смысл точнее, но трудны для восприятия, а в практической работе (для решения типичных квантово-механических задач) скорее мешают, чем помогают. Этим объясняется, почему интерпретация Эверетта так долго не использовалась физиками. Тем не менее, в последние десятилетия она стала по-настоящему востребованной, в частности, в связи с появлением квантовой информатики.

Анализ литературы. Одним из первых с критикой копенгагенской интерпретации квантовой механики, основанной на анализе процесса квантового измерения, выступил Н. Эверетт [2]. Он отметил, что изменение со временем состояния квантовой системы, состоящей из системы элементарных частиц и измерительного прибора, описывается уравнением Шредингера. Решение этого уравнения есть однозначная функция времени и, следовательно, результат измерения должен быть также однозначным. Это противоречит копенгагенской интерпретации квантовой механики [3]. Согласно которой редукция волновой функции в процессе измерения носит случайный характер. Со временем появились расширенные концепции Эверетта [4].

Экспериментальные данные говорят в пользу стохастического характера редукции квантового состояния в процессе измерения. В связи с этим возникает проблема построения такой математической модели процесса квантового измерения, в которой это противоречие было бы устранено. Эверетт предложил строить математическую модель исходя из поиска такого алгоритма усреднения решения уравнения Шредингера, который привел бы к редукции вектора состояния. Он действовал аналогично тому, как поступал Пуанкаре пытаясь усреднять траектории классических динамических систем с целью получить возрастание энтропии, поскольку наблюдается процесс возрастания меры на фазовом пространстве динамической системы, с помощью которой ведется усреднение.

Попытки Пуанкаре ввести в механику энтропию не увенчались успехом. Гораздо успешнее оказался подход, основанный на стохастическом квантовании динамических систем, предложенный Ланжевеном, Эйнштейном, Фоккером и Планком [5]. Отметим также подход развитый Климонтовичем [6].

Цель статьи. В настоящей работе предложена математическая модель квантового измерения, в которой с помощью подхода Климонтовича [6] и метода стохастического квантования в формулировке работы [5], построена теория, соответствующая эксперименту.

Получение редукции волновой функции. Будем считать, что динамическая система, состоящая из квантовой системы и измерительного прибора с общим гамильтонианом *H*, является неустойчивой по отношению к малому изменению начального состояния $\delta|0>$.

Поскольку, согласно Пригожину, мы не можем производить измерения начальных состояний динамических систем с какой угодно точностью, то для неустойчивых динамических систем мы не можем использовать стандартное уравнение Шредингера

$$\mathrm{i}\hbar \frac{d}{dt} | t > H | t > . \tag{1}$$

Здесь $| t >$ – зависящий от времени кет-вектор состояния системы. Мы должны заменить его уравнением более пригодным для описания данной ситуации. Для этого будем смотреть на решения уравнения (1): $|t, a >$, которые при $t = 0$ отличаются так мало, что это отличие не доступно измерительным приборам, как на функции случайного события a. То есть

$$|t, a > = \exp\{-\frac{iHt}{\hbar}\}|0, a > \approx \exp\{-\frac{i}{\hbar}(H + \delta H(a))t\}|0>. \tag{2}$$

Мы считаем, что все траектории $|t, a >$ начинаются в одной точке $|0>$, а все отличие связано с флуктуациями гамильтониана $\delta H(a)$.

Функция

$$\exp\{-\frac{i}{\hbar}(H+\delta H(a))t\}|0> \equiv (H + \delta H(a))\,|t>+\delta|t, a > \tag{3}$$

является решением уравнения

$$\mathrm{i}\hbar\, \partial\, (|t >+\delta|t, a >) = (H+\delta H(a))(|t >+\delta|t, a >), \tag{4}$$

которое и является исходным уравнением работы. Это уравнение описывает, как мы в этом убедимся, процесс квантового измерения. На флуктуации $\delta H(a)$ и $\delta|t, a>$, которые входят в выражение (4) наложены условия

$$<\delta H(a)> = <\delta|t, a>>= 0. \tag{5}$$

Здесь усреднение векторной или операторной случайной функции $f(a)$ понимается так

$$<f(a)>= \int_{\Omega} P(da)\, f(a)\, , \tag{6}$$

где $\Omega\{a\}$ множество случайных событий, представляющих собой наблюдение динамики (2) для одинаково приготовленных (с максимально возможной точностью) начальных состояний; P(…) – вероятностная мера на этом множестве. Проведя усреднение уравнения (4) в смысле (6), получим

$$\mathrm{i}\hbar\, \partial\, | t> = H| t > + <\delta H(a)\delta|t, a >. \tag{7}$$

Чтобы использовать уравнение (7) для описания процесса квантового измерения, разложим векторы по собственным векторам наблюдаемой величины, которую измеряет измерительный прибор. Гамильтониан этого прибора входит слагаемым в H:

$$|t> = \sum_i c_i(t) \,|\, i>,$$

$$<\delta H(a)\delta \,|\, t,a>> = \sum_i \Phi_i(t) \,|\, i>.$$

Подставим результаты разложения в уравнение (7).

$$\sum_k i\hbar\dot{c}_k \,|\, k>= \sum_{k,j} |\, j>< j \,|\, H \,|\, k> + \sum_j \Phi_j(t) \,|\, j> \equiv \sum_k i\hbar f_k(c_n) \,|\, k>, \quad (8)$$

то есть

$$\dot{c}_k = f_k(c_n). \quad (9)$$

При выводе (9) сделано предположение, что $\Phi_j(t)$ зависят от t только через c_n.

Пусть уравнения (9) имеют гамильтонову формулу, т.е. $\{C_k\}=\{x^k\}\cup\{P_k\}$ и (9) можно записать в виде уравнений Картана [7]:

$$o = (\partial\Omega)/(\partial dx^k)\ \partial\Omega/(\partial dp_k),$$

где $\Omega = dP_i\wedge dx^i - dH\wedge dt$.

Перейдем к переменным J_i , α^i :

$$\Omega = dJ_i \wedge d\alpha^i - d(H_1(J_s) + H_2(J_s\,,\, \alpha^s))\wedge dt$$

и уравнения Картана примут вид:

$$o = (\partial\,\Omega)/(\partial dJ_i\,) = \partial\Omega/(\partial d\alpha^i\,) = d\alpha^i - ((\partial\, H_1)/(\partial J_i\,)+(\partial H_2)/(\partial J_i\,))\, dt = dJ_i + $$
$$+ (\partial H_2)/(\partial\alpha^i\,)\, dt\,,$$

или

$$\dot{\alpha}^i = \partial\, H_1(J_s)/(\partial J_i) + \partial\, H_2(J_s,\alpha^s)/(\partial\, J_i), \quad (10)$$
$$j_i^{\,1} = -\,\partial H_2(J_s,\, \alpha^s)/\partial\alpha^i\,.$$

Решая систему уравнений (10) методом теории возмущений [8]:

$$J_i = J_i^0 + J_i^1 + \ldots\,; \qquad \alpha^i = \alpha_0^{\,i} + \alpha_1^{\,i} + \ldots\,,$$

в первом порядке приближений получим

$$j_i^{\,1} = \partial H_2(J^0{}_s,\alpha_0{}^k+\omega^k t)/\partial\alpha^i = \sum_{\vec{n}} \exp(\,i\,(n_{\,k}\omega^k)\,t)\,. \quad (11)$$

Здесь $\omega^k \equiv (\partial H_1)/(\partial J_k)$ и мы разложили правую часть (11) в ряд Фурье. Таким образом, в первом порядке теории возмущений переменная "действие" будет иметь вид:

$$J^1{}_i = \sum_{\vec{n}} \frac{c_{\vec{n}} \exp(i(n_k \omega^k)t)}{i(n_k \omega^k)}. \qquad (12)$$

Будем считать, что члены ряда (12) для которых выполняется условие резонанса: $n_i\,\omega^i = 0$ не равны 0 , тогда, как показывают численные эксперименты, движение становится случайным [9].

Тогда уравнение (9) можно заменить эквивалентным ему уравнением Ланжевена:

$$dC_m = -(\partial U(C_k)/\partial C_m)dt + dW_m, \qquad (13)$$

где dW_m – "случайная сила" удовлетворяющая условиям [8]:

$$\langle dW_n \rangle = 0,\ \langle dW_n\, dW_m \rangle = c\ \rho_{mn}\ dt. \qquad (14)$$

Уравнение (13), в свою очередь, эквивалентно уравнению Фоккера-Планка [9]

$$\dot{\rho}\,(\mathrm{C_k}) = \sum_j \{\partial/\partial Cj(\partial U(Ck)/\partial Cj\rho(Ck)) + 1/2Q\partial 2/(\partial Cj)2\rho(Ck)\}. \qquad (15)$$

Действительно, для производной по времени плотности распределения вероятности $\rho(C_m, t)$ нахождения системы в точке получим:

$$d/dt \int dc\ \rho(c_m,t)f(c_m) = \int dc\ \partial\rho/\partial t\ f(c_m) = 1/dt \int dc\ \rho(c_m)df(c_m) =$$

$$= 1/dt \int dc_\rho(c_p)(\partial f/(\partial c_m)\ dc_m + 1/2\ \ (\partial^2 f)/(\partial c_m\, \partial c_s)\ dc_m;$$

$$dc_s + \ldots) = 1/dt \int dc_\rho(c_p)\{\partial f/(\partial c_m)\ (-\partial U/(\partial c_m)\ dt + dW_m) +$$

$$+1/2\ \ (\partial^2 f)/(\partial c_m\, \partial c_s)(-\partial U/(\partial c_m)dt + dW_m)(-\partial U/(\partial c_s);$$

$$dt + dW_s) + \ldots\} = \int dc\ \partial/(\partial c_m)(\rho\ \partial U/(\partial c_m))f +$$

$$+1/(2dt) \int dc\ (\partial^2 f)/(\partial c_m\, \partial c_s)\ \rho dW_m\ \ dW_s + \ldots\}.$$

Здесь было использовано интегрирование по начальным значениям траекторий системы и учтен факт гамильтоновости системы. Усредним теперь полученное выражение по всем значениям случайной силы dW_n на всех случайных траекториях системы. Тогда получаем следующее выражение

$$\int dc\{1/2\ \ (\partial^2\ \rho)/(\partial c_m\, \partial c_s)\ \ \langle dW_m\, dW_s\rangle/dt + \partial/(\partial c_m)(\partial U/(\partial \mathrm{c_m})\ \rho)\}f,$$

которое ввиду произвольности функции f и условия (14), является уравнением Фоккера-Планка (15). Его стационарное решение имеет вид:

$$\rho(C_k) = C \exp(-2U(C_k)/Q). \tag{16}$$

Если выбрать $U(C_m)$ таким образом, чтобы при $\tilde{C}_k$, равном (1, 0, …); (0, 1, …); …; оно имело min, причем

$$\rho(\tilde{C}_k) = C\exp(-2U(\tilde{C}_k)/Q) = |\ C_k(0)|^2, \tag{17}$$

то мы получим простую математическую модель редукции кет-вектора состояния квантовой системы в процессе измерения, поскольку разложение $|\ t\ \rangle$, будет давать $|\ k\rangle$ с вероятностью (17). Если глубина "потенциальной ямы" в точке $((\tilde{C}_1,\ldots,\tilde{C}_n\ldots,)$ >> Q, то процесс редукции приводит к однозначному результату

Выводы. Таким образом, отталкиваясь от обратимого уравнения Шрёдингера, мы получили необратимый процесс квантового измерения.

Список литературы: **1.** *Чивилихин С.А.* Квантовая информатика / *С.А.Чивилихин*. – ИТМО, Санкт-Петербург, 2009. – 80 с. **2.** *Everett H.* "Relative State" Formulation of Quantum Mechanics / *H. Everett* // Reviews of Modern Physics. – 1957. – № 3. – P. 454. **3.** *Ландау Л.Д.* Квантовая механика / *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*. – М.: Наука, 1990. – 752 с. **4.** *Менский М.Б.* Квантовые измерения, феномен жизни и стрела времени: связи между тремя "великими проблемами" (по терминологии Гинзбурга) // УФН, 2007. – № 4. – С. 415. **5.** *Пригожин И.* От существующего к возникающему (время и сложность в физических науках) / *И. Пригожин*. – М.: Наука, 1984. – 287 с. **6.** *Климонтович Ю.Л.* Статистическая физика / *Ю.Л. Климонтович*. – М.: Наука, 1982. – 608 с. **7.** *Картан Э.* Интегральные инварианты / *Э. Картан*. – М., Л.: ГИТЛ, 1940. – 215 с. **8.** *Хакен Г.* Синергетика / *Г. Хакен*. – М.: Мир, 1980. – 197 с. **9.** *Хакен Г.* Синергетика (Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах) / *Г. Хакен*. – М.: Мир, 1985. – 188 с.

УДК 371.326

Математична модель квантового вимірювання / Міцай Ю.М., Майорова А.М. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2012. – № 38. – С. 121 – 127.

В даній роботі побудовано математичну модель редукції хвильової функції. В основу моделі покладені ідеї, розвинені Клімонтовічем, і застосован метод стохастичного квантування у формулюванні Пригожина. Запропоновано рівняння, що враховує невизначеність початкового квантового стану. З цього рівняння отримано рівняння Фоккера-Планка, рішення якого і свідчать про наявність редукції. Бібліогр.: 9 назв.

Ключові слова: математична модель, квантове вимірювання, хвильова функція, редукція.

UDC 371.326

Mathematical model of quantum measurement / Mitsay Yu.N., Mayorova A.N. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2012. – №. 38. – P. 121 – 127.

In this paper, a mathematical model of wave function reduction is built. The model is based on the ideas developed by Klimontovich and applied the method of stochastic quantization in the formulation of Prigogine. An equation that takes into account the uncertainty of the initial quantum state proposed. From this equation, we built an equation of the Fokker-Planck , solutions of which indicate the presence of reduction. Refs.: 9 titles.

Keywords: quantum measurement, mathematical model, the wave function reduction.

Поступила в редакцию 10.04.2012