

*В. Д. ПАВЛЕНКО*, д-р техн. наук, проф., ОНПУ, Одесса,  
*С. В. ПАВЛЕНКО*, канд. техн. наук, с.н.с., ОНПУ, Одесса,  
*В. И. ЛОМОВОЙ*, магистр, НУ "ОМА", Одесса

## **ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ ВОЛЬТЕРРА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ**

Исследуется точность и вычислительная устойчивость методов детерминированной идентификации нелинейных динамических систем в виде многомерных АЧХ и ФЧХ. Рассматриваются аппроксимационный и интерполяционный методы идентификации с использованием в качестве тестовых полигармонических сигналов. Вычислительная устойчивость процедуры идентификации обеспечивается применением метода регуляризации некорректных задач. Для сглаживания оценок получаемых характеристик используется вейвлет-фильтрация. Ил.: 9. Табл.: 2. Библиогр.: 14 назв.

**Ключевые слова:** нелинейные динамические системы; методы идентификации; модели Вольтера; многомерные АЧХ и ФЧХ; регуляризация; вейвлет-фильтрация.

**Постановка проблемы.** Для математического моделирования сложных нелинейных динамических систем (НДС) часто используют непараметрические динамические модели на основе интегро-степенных рядов (модели Вольтерра) [1 – 3]. При этом исследуемые НДС характеризуются многомерными весовыми функциями – ядрами Вольтерра или их Фурье-изображениями – многомерными передаточными функциями, инвариантными к виду входного сигнала, для моделирования системы во временной или частотной области, соответственно [2].

Если для исследуемой НДС необходимо оценивать характер искажений формы сигналов, то используется временная область, и определяются ядра Вольтерра. Если же требуется проводить анализ частотных искажений, то, очевидно, при моделировании системы эффективнее использовать частотную область и определять передаточные функции или многомерные АЧХ и ФЧХ.

Для решения многих практических задач применяются частотные характеристики, которые находят, используя данные активных экспериментов "вход-выход" с помощью полигармонических тестовых сигналов [4, 5].

Актуальной задачей является исследование эффективности разработанных методов и инструментальных средств идентификации

НДС на основе модели Вольтерра в частотной области с использованием тестовых полигармонических сигналов.

**Анализ литературы.** В работах [6, 7] получил развитие аппроксимационный метод идентификации НДС на основе модели Вольтерра в частотной области в виде многомерных АЧХ и ФЧХ, основанный на составлении линейных комбинаций откликов системы на входные полигармонические сигналы с различными амплитудами. Предложен метод идентификации с выбором оптимальных амплитуд тестовых сигналов и автоматическим определением соответствующих масштабирующих коэффициентов, обеспечивающий минимум погрешности оценки многомерных АЧХ и ФЧХ.

В [8, 9] предложен интерполяционный метод построения модели Вольтерра НДС в частотной области, основанный на дифференцировании откликов по амплитуде тестовых воздействий, минимизирующий методическую погрешность метода идентификации.

На результаты идентификации НДС в частотной области в виде многомерных АЧХ и ФЧХ с помощью аппроксимационного и интерполяционного методов существенное влияние оказывают погрешности измерений откликов. Точность и вычислительная устойчивость оценок многомерных АЧХ и ФЧХ достигаются применением метода регуляризации некорректных задач [10 – 12].

Для повышения вычислительной устойчивости методов идентификации на основе модели Вольтерра в частотной области применяются процедуры шумоподавления (сглаживания) к получаемым оценкам многомерных АЧХ и ФЧХ, основанные на вейвлет-преобразовании [13].

**Целью работы** является сравнительный анализ точности и вычислительной устойчивости методов идентификации НДС в частотной области в виде многомерных АЧХ и ФЧХ с использованием полигармонических тестовых сигналов.

**Описание нелинейных динамических систем на основе модели Вольтерра во временной и частотной области.** В общем случае соотношение типа "вход-выход" для НДС (рис. 1) может быть представлено интегро-степенным рядом Вольтерра (РВ) вида [1 – 3]:

$$y[x(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} y_n[x(t)] = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} w_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{l=1}^n x(t - \tau_l) d\tau_l, \quad (1)$$

где  $x(t)$  и  $y[x(t)]$  – соответственно входной и выходной сигналы системы;  $w_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  – импульсная переходная функция или ядро Вольтерра  $n$ -го порядка;  $y_n[x(t)]$  –  $n$ -ая парциальная составляющая (ПС) отклика  $y[x(t)]$  системы ( $n$ -мерный интеграл свертки).

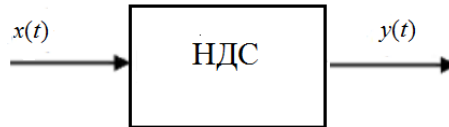


Рис. 1. Нелинейная динамическая система с одним входом и одним выходом

Идентификация НДС в виде модели Вольтерра состоит в определении  $n$ -мерных импульсных переходных функций  $w_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$  или их Фурье-образов  $W_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)$  –  $n$ -мерных передаточных функций (ПФ), соответственно для моделирования системы во временной (рис. 2) или частотной (рис. 3) области.

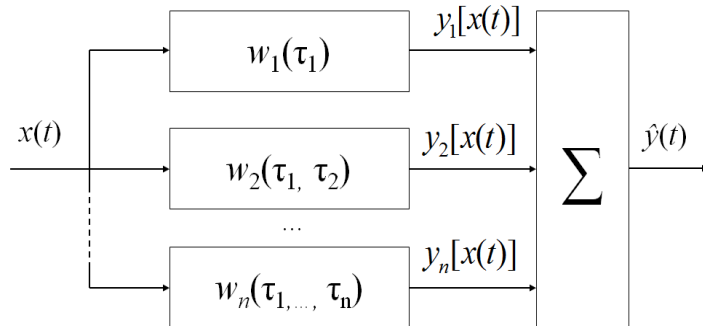


Рис. 2. Модель Вольтерра для НДС во временной области

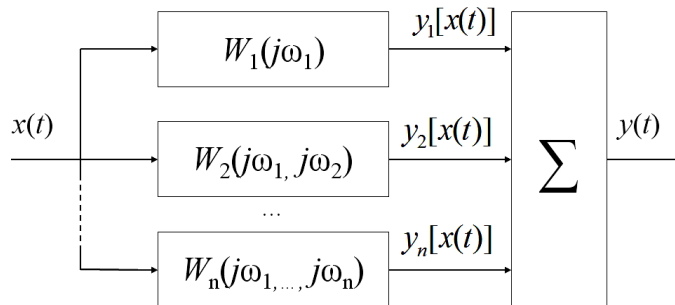


Рис. 3. Модель Вольтерра для НДС в частотной области

Многомерное ( $n$ -мерное) преобразование Фурье ядра Вольтерра  $n$ -го порядка записывается в виде

$$W_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = F_n \langle w_n(t_1, \dots, t_n) \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty w_n(t_1, \dots, t_n) \exp\left(-j \sum_{i=1}^n \omega_i t_i\right) \prod_{i=1}^n dt_i, \quad (2)$$

где  $F_n \langle \rangle$  –  $n$ -мерное преобразование Фурье;  $j$  – мнимая единица. Тогда модель нелинейной системы на основе РВ в частотной области можно представить в виде [2]

$$y[x(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{-1} \left\langle W_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) \prod_{i=1}^n X(j\omega_i) \right\rangle_{t_1=\dots=t_n=t}, \quad (3)$$

где  $F_n^{-1} \langle \rangle$  – обратное  $n$ -мерное преобразование Фурье;  $X(j\omega_i)$  – Фурье-изображение входного сигнала.

Идентификация нелинейной системы в частотной области сводится к определению на заданных частотах значений модуля и фазы многомерной ПФ – многомерных АЧХ  $|W_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)|$  и ФЧХ  $\arg W_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)$ , которые определяются по формулам:

$$|W_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)| = \sqrt{[\operatorname{Re} W_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)]^2 + [\operatorname{Im} W_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)]^2}, \quad (4)$$

$$\arg W_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n) = \arctg \frac{\operatorname{Im} W_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)}{\operatorname{Re} W_n(j\omega_1, \dots, j\omega_n)}, \quad (5)$$

где  $\operatorname{Re}$  и  $\operatorname{Im}$  – вещественная и мнимая части комплексной функции  $n$  переменных, соответственно.

**Аппроксимационный метод идентификации НДС.** При идентификации ядра Вольтерра  $n$ -го порядка ( $n > 1$ ) существенное влияние на точность оказывают соседние члены ряда (1). Поэтому необходимо применять специальные приемы [6], позволяющие минимизировать это влияние. Идея такого приема заключается в конструировании из реакций системы на  $N$  ( $N \geq n$ ) тестовых входных сигналов с заданными амплитудами такого выражения, которое с точностью до отброшенных членов порядка  $N+1$  и выше, было бы равно  $n$ -му члену ряда Вольтерра.

Если на вход системы поочередно подаются тестовые сигналы  $a_1x(t), a_2x(t), \dots, a_Nx(t)$ , где  $N$  – порядок аппроксимационной модели;  $a_1, a_2, \dots, a_N$  – разные действительные числа, отличные от нуля и удовлетворяющие условию  $|a_j| \leq 1$  для  $\forall j = 1, 2, \dots, N$ ;  $x(t)$  – произвольная

функция, то линейная комбинация откликов НДС на эти воздействия равна  $n$ -й ПС отклика на сигнал  $x(t)$  с погрешностью  $\Delta$ , т. е.

$$\sum_{j=1}^N c_j y[a_j x(t)] = y_n[x(t)] + \Delta, \quad (6)$$

где  $c_j$  – вещественные коэффициенты, такие что удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{aligned} c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_N a_N &= 0, \\ c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 + \dots + c_N a_N^2 &= 0, \\ &\dots \\ c_1 a_1^n + c_2 a_2^n + \dots + c_N a_N^n &= 1, \\ &\dots \\ c_1 a_1^N + c_2 a_2^N + \dots + c_N a_N^N &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) всегда имеет решение, причем единственное, так как ее определитель только множителем  $a_1 a_2 \dots a_N$  отличается от определителя Вандермонда. Выбор амплитуд  $a_j$  должен обеспечивать сходимость ряда (1) и минимум методической погрешности выделения парциальной составляющей  $\Delta$ , определяемой остатком ряда (1).

В [7] обосновывается выбор амплитуд тестовых воздействий и соответствующих коэффициентов, обеспечивающих минимальную методическую погрешность оценки многомерных АЧХ и ФЧХ идентифицируемой системы.

**Интерполяционный метод идентификации НДС.** В данном методе идентификации НДС на основе модели Вольтерра для разделения отклика НДС на ПС  $\hat{y}_n(t)$  используется  $n$ -кратное дифференцирование выходного сигнала по параметру  $a$  – амплитуде тестовых воздействий [8].

Если на вход системы подать тестовый сигнал вида  $ax(t)$ , где  $x(t)$  – произвольная функция;  $|a| \leq 1$  – масштабирующий коэффициент, то для выделения ПС  $n$ -го порядка  $\hat{y}_n(t)$  из измеряемого отклика НДС  $y[ax(t)]$  необходимо найти  $n$ -ую частную производную отклика по амплитуде  $a$  при  $a = 0$

$$n! \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} w_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{k=1}^n x(t - \tau_k) d\tau_k = y_a^{(n)}[ax(t)]_{a=0}. \quad (8)$$

Для вычисления данного выражения частная производная заменяется выражением в конечных разностях. Дифференцирование функции, заданной в дискретных точках, может быть выполнено одним из численных методов после предварительного сглаживания результатов измерений. Используется универсальный приём, позволяющий заменить производную любого порядка  $n$ , разностным соотношением так, чтобы погрешность от такой замены для функции  $y[ax(t)]$  была любого заранее определённого порядка аппроксимации  $p$  относительно шага  $h = \Delta a$  разностной сетки по амплитуде  $a$ . На основе равенства

$$\frac{\partial^n y[ax(t)]}{\partial a^n} = \frac{1}{h^n} \sum_{r=-r_1}^{r_2} c_r y(a+rh) + O(h^p) \quad \text{для } \forall t \geq 0 \quad (9)$$

методом неопределённых коэффициентов подбираются независимые от  $h$  коэффициенты  $c_r$ ,  $r = -r_1, -r_1 + 1, \dots, r_2$ , так, чтобы равенство (9) оказалось справедливым. Границы суммирования  $r_1 \geq 0$  и  $r_2 \geq 0$  можно взять произвольными, но так, чтобы порядок  $r_1 + r_2$  разностного отношения  $h^{-n} \sum c_r y(a + rh)$  удовлетворял неравенству  $r_1 + r_2 \geq n + p - 1$ .

Для определения  $c_r$  необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{L} & 1 \\ -r_1 & -r_1 + 1 & \mathbf{L} & r_2 \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ (-r_1)^{n-1} & (-r_1 + 1)^{n-1} & \mathbf{L} & r_2^{n-1} \\ (-r_1)^n & (-r_1 + 1)^n & \mathbf{L} & r_2^n \\ (-r_1)^{n+1} & (-r_1 + 1)^{n+1} & \mathbf{L} & r_2^{n+1} \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ (-r_1)^{n+p-1} & (-r_1 + 1)^{n+p-1} & \mathbf{L} & r_2^{n+p-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{-r_1} \\ c_{-r_1+1} \\ \mathbf{L} \\ c_{r_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{L} \\ 0 \\ n! \\ 0 \\ \mathbf{L} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Получены формулы для численного дифференцирования при использовании центральных и правых разностей для равноотстоящих узлов  $y_r = y[rhx(t)]$ ,  $r = -r_1, -r_1 + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, r_2 - 1, r_2$  с шагом разностной сетки по амплитуде  $h$ . Значения амплитуд и соответствующих им коэффициентов для интерполяционного метода приведены в [8].

**Использование тестовых полигармонических сигналов.** Для идентификации НДС в частотной области применяются тестовые полигармонические сигналы

$$x(t) = A \sum_{k=1}^n \cos(\omega_k t) = \frac{A}{2} \sum_{k=1}^n \left( e^{j\omega_k t} + e^{-j\omega_k t} \right), \quad (11)$$

где  $n$  – порядок оцениваемых характеристик;  $A$ ,  $\omega_k$  – амплитуда и частота  $k$ -ой гармоники, соответственно.

В [14] показано, что  $n$ -ю ПС отклика НДС можно представить в виде:

$$y_n(t) = \frac{A^n}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{\left[ \frac{n}{2} \right]} C_n^m \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_{m+1}=1}^n \left| W_n(-j\omega_{k_1}, \dots, -j\omega_{k_m}, j\omega_{k_{m+1}}, \dots, j\omega_{k_n}) \right| \times \quad (12)$$

$$\times \cos \left( \left( -\sum_{l=0}^m \omega_{k_l} + \sum_{l=m+1}^n \omega_{k_l} \right) t + \arg W_n(-j\omega_{k_1}, \dots, -j\omega_{k_m}, j\omega_{k_{m+1}}, \dots, j\omega_{k_n}) \right)$$

где  $[\cdot]$  – функция выделения целой части числа.

Из ПС отклика (12) на тестовый сигнал (11) выделяется составляющая с частотой  $\omega_1 + \dots + \omega_n$ :

$$A^n |W_n(j\omega_1, \mathbf{K}, j\omega_n)| \cos[(\omega_1 + \mathbf{K} + \omega_n)t + \arg W_n(j\omega_1, \mathbf{K}, j\omega_n)]. \quad (13)$$

При определении многомерных АЧХ и ФЧХ необходимо учитывать ограничения на выбор частот тестовых полигармонических сигналов и, следовательно, значения АЧХ и ФЧХ в этих точках многомерного пространства частот не могут быть получены на основе прямых измерений, а только с помощью интерполяции [14]. При практической реализации метода идентификации НДС необходимо минимизировать число таких точек неопределенности на интервале определения многомерных частотных характеристик, т.е. обеспечить минимум ограничений на выбор частот тестового сигнала. Доказана теорема о выборе частот.

*Теорема о выборе частот.* Для однозначности фильтрации из  $n$ -ой парциальной составляющей отклика системы гармоники с комбинационной частотой  $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$  необходимо и достаточно, чтобы последняя не равнялась комбинационным частотам вида:  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n$ , где коэффициенты  $\{k_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  удовлетворяют условиям:

– мощность  $\chi$  конечного множества отрицательных коэффициентов ( $k_i < 0$ ) может принимать значения  $0 \leq \chi \leq [n/2]$ ;

– сумма модулей коэффициентов  $k_i$  не больше порядка  $n$  определяемого ядра:

$$\sum_{i=1}^n |k_i| \leq n; \quad (14)$$

– сумма модулей коэффициентов  $k_i$  сравнима по mod 2 с порядком определяемого ядра  $n$ :

$$\sum_{i=1}^n |k_i| \equiv n \pmod{2}, \text{ т.е. } n - \sum_{i=1}^n |k_i| = 2l, \quad l \in N. \quad (15)$$

Применение этих ограничений при определении АЧХ и ФЧХ второго порядка требует обеспечить между частотами тестового сигнала выполнение 3-х неравенств:  $\omega_1 \neq 0$ ,  $\omega_2 \neq 0$  и  $\omega_1 \neq \omega_2$ , при определении характеристик третьего порядка – 15 неравенств:  $\omega_1 \neq 0$ ,  $\omega_2 \neq 0$ ,  $\omega_3 \neq 0$ ,  $\omega_1 \neq \omega_2$ ,  $\omega_1 \neq \omega_3$ ,  $\omega_2 \neq \omega_3$ ,  $2\omega_1 \neq \omega_2 + \omega_3$ ,  $2\omega_2 \neq \omega_1 + \omega_3$ ,  $2\omega_3 \neq \omega_1 + \omega_2$ ,  $2\omega_1 \neq \omega_2 - \omega_3$ ,  $2\omega_2 \neq \omega_1 - \omega_3$ ,  $2\omega_3 \neq \omega_1 - \omega_2$ ,  $2\omega_1 \neq -\omega_2 + \omega_3$ ,  $2\omega_2 \neq -\omega_1 + \omega_3$  и  $2\omega_3 \neq -\omega_1 + \omega_2$ .

При использовании тестовых полигармонических сигналов процедура идентификации НДС в частотной области – определения АЧХ и ФЧХ  $n$ -го порядка на основе аппроксимационного и интерполяционного методов может быть представлена обобщенной структурной схемой (рис. 4).

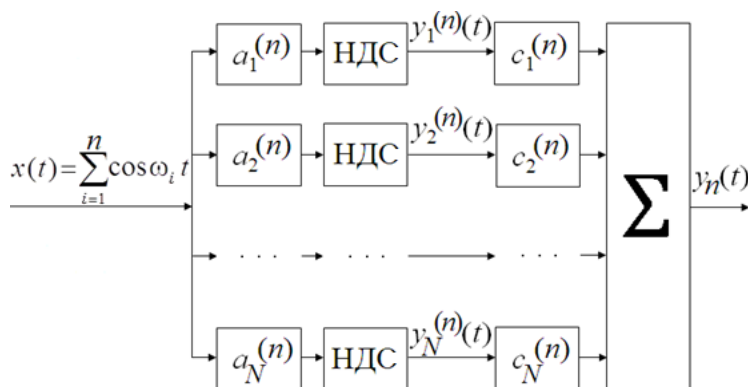


Рис. 4. Структурная схема процедуры идентификации НДС в частотной области



**Анализ точности и вычислительной устойчивости методов идентификации.** Исследование эффективности рассматриваемых вычислительных методов построения модели Вольтерра НДС в частотной области выполнено с помощью компьютерного эксперимента в системе Matlab. Исследование проводилось на модельном примере динамической системы первого порядка с квадратичной нелинейностью в обратной связи. Для рассматриваемой системы получены аналитические выражения АЧХ и ФЧХ первого, второго и третьего порядков [6], которые используются в исследованиях в качестве эталонных характеристик.

Для обеспечения вычислительной устойчивости методов идентификации НДС в частотной области применяется метод регуляризации некорректных задач [12]. При этом в качестве параметра регуляризации используется амплитуда тестовых полигармонических сигналов, что позволяет повысить точность идентификации в 1,5 – 2 раза [6].

Результаты идентификации с помощью аппроксимационного и интерполяционного методов для количества экспериментов  $N = 4$  в виде АЧХ та ФЧХ первого и поддиагонального сечения второго порядка приведены на рис. 5 и рис. 6, соответственно.

Результаты сравнения по точности рассматриваемых методов идентификации тестовой системы в виде нормированной среднеквадратичной ошибки (НСКО) на примере поддиагональных сечений АЧХ и ФЧХ второго порядка, приведены в табл. 1 и табл. 2, соответственно.

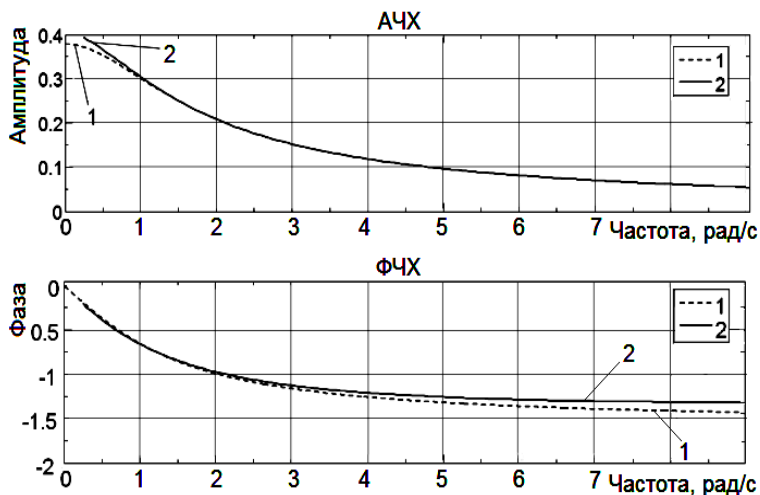


Рис. 5. АЧХ и ФЧХ тестовой НДС первого порядка: 1 – эталонная, 2 – результат идентификации

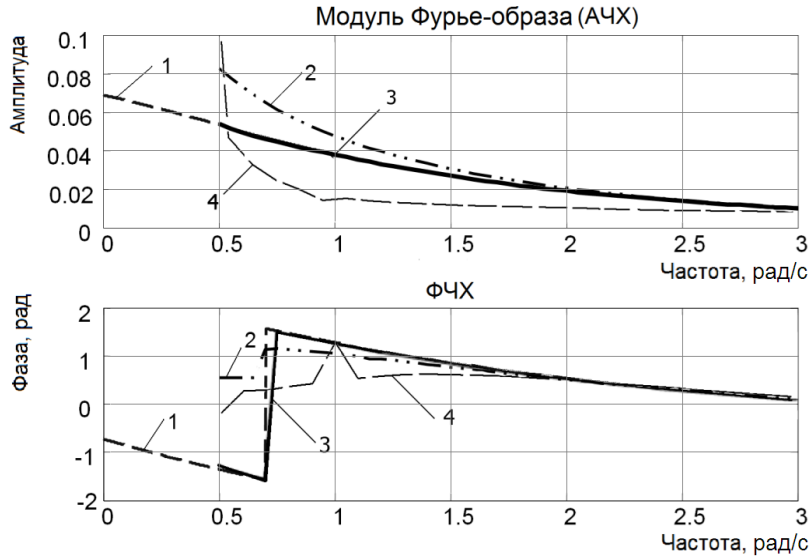


Рис. 6. Поддиагональные сечения АЧХ и ФЧХ тестовой НДС второго порядка: 1 – эталонное; результаты идентификации: 2 – аппроксимационным, 3 – интерполяционным методами, 4 – методом [1]

Таблица 1

Сравнительный анализ методов идентификации на примере АЧХ второго порядка

Порядок АЧХ $n$	Количество экспериментов (порядок аппроксимации), $N$	ПНСКО для АЧХ, %	
		Аппроксимационный	Интерполяционный
1	2	3.6429	2.1359
	4	1.1086	0.3468
	6	0.8679	0.2957
2	2	26.0092	30.2842
	4	3.4447	2.0452
	6	7.3030	89.2099
3	4	72.4950	10.9810
	6	74.4204	10.7642

Для повышения помехоустойчивости методов идентификации применяются процедуры шумоподавления (сглаживания) к полученным на основе реальных измерений откликов с погрешностью оценкам многомерных АЧХ и ФЧХ. Для шумоподавления в процедуре идентификации используется вейвлет-фильтрация [13] с автоматическим

выбором типа и параметров базовых вейвлет-функций, что позволило минимизировать влияние погрешностей измерений на точность идентификации и повысить точность оценки характеристик в 1,3 – 4 раза.

Проведено исследование вычислительной устойчивости интерполяционного метода идентификации на примере тестовой системы, результаты которого демонстрируют диаграммы значений ПНСКО оценки АЧХ (рис. 7 а) и ФЧХ (рис. 7 б) для " $n - N$ " ("порядок характеристики" – "порядок аппроксимации") при применении отдельно регуляризации и кумулятивный эффект от совместного применения регуляризации и вейвлет-фильтрации.

Таблица 2

Сравнительный анализ методов идентификации на примере ФЧХ второго порядка

Порядок ФЧХ, $n$	Количество экспериментов (порядок аппроксимации), $N$	ПНСКО для ФЧХ, %	
		Аппроксимационный	Интерполяционный
1	2	3.3451	2.5420
	4	3.1531	2.0618
	6	3.1032	1.9311
2	2	30.2842	76.8221
	4	2.0452	3.7603
	6	4.6408	5.9438
3	4	10.9810	1.6280
	6	10.7642	1.5522

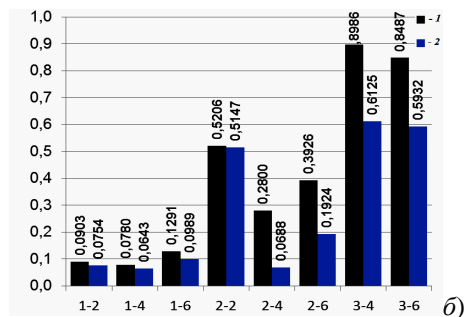
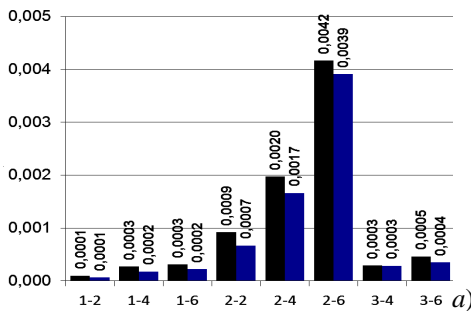


Рис. 7. МСКО оценки АЧХ (а) и ФЧХ (б) для " $n - N$ " с помощью интерполяционного метода идентификации при применении: 1 – регуляризации; 2 – регуляризации и вейвлет-фильтрации (кумулятивный эффект)

Результаты идентификации тестовой нелинейной динамической системы, полученные с помощью средств имитационного моделирования Matlab–Simulink в виде объёмных изображений АЧХ и ФЧХ, построенные по оценкам их поддиагональных сечений второго и третьего порядков при различных значениях количества экспериментов  $N$  и при различных значениях  $\omega_2 - \omega_1$  и  $\omega_3 = 0,1$  рад/с, представлены на рис. 8 и рис. 9.

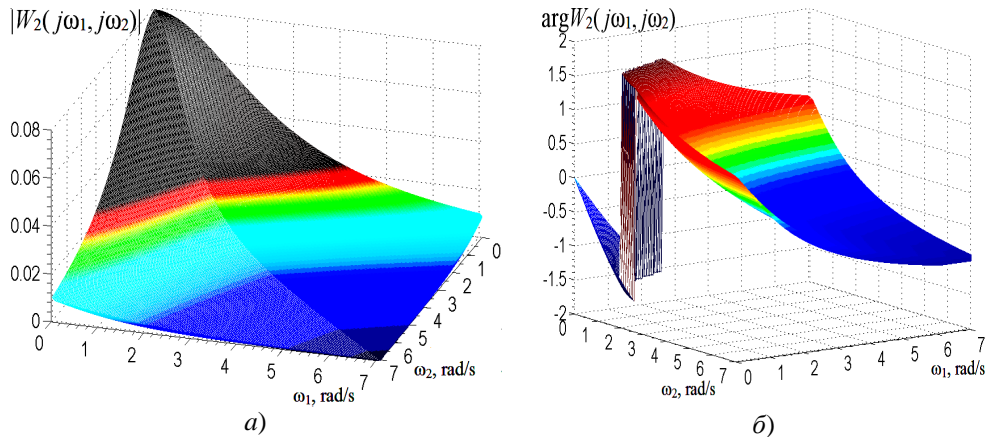


Рис. 8. Оценки АЧХ (а) и ФЧХ (б) 2-го порядка для  $N = 4$

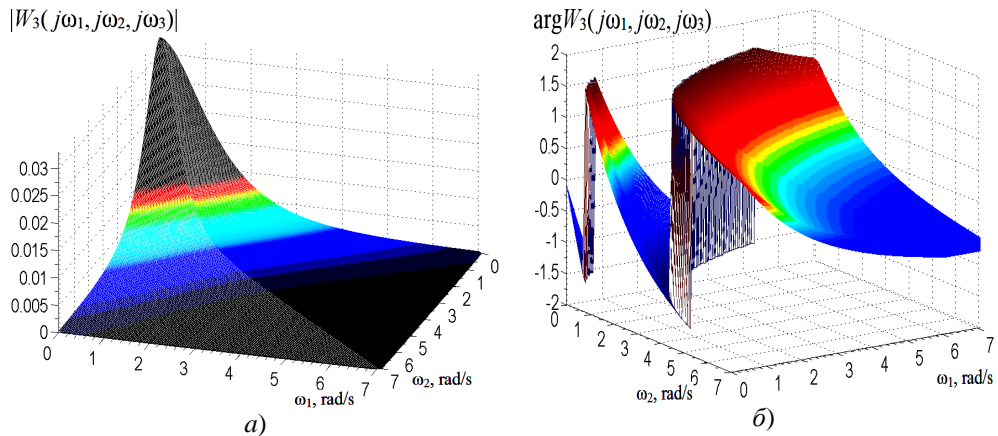


Рис. 9. Оценки АЧХ (а) и ФЧХ (б) 3-го порядка для  $N = 6$ ,  $\omega_3 = 0,1$  рад/с

**Выводы.** Проведено исследование эффективности разработанных методов и инструментальных средств идентификации НДС на основе модели Вольтерра в частотной области с использованием тестовых полигармонических сигналов. Исследования выполнены с помощью средств компьютерного моделирования в ППП Matlab–Simulink на

тестовой системе, для которой известны аналитические выражения АЧХ и ФЧХ 1-го, 2-го и 3-го порядков.

Рассматриваемый аппроксимационный метод оценки АЧХ и ФЧХ 1-го, 2-го и 3-го порядков исследуемой тестовой системы позволил повысить точность идентификации по отношению к существующему в 1,5 – 2 раза. Интерполяционный метод идентификации позволил повысить точность построения модели Вольтерра в 1,8 – 3 раза, но для вычисления оценок АЧХ и ФЧХ используется на 10% больше машинных инструкций.

Применение вейвлет-фильтрации на основе материнского вейвлета *coiflet* позволяет получать сглаженные оценки сечений АЧХ и ФЧХ и вместе с тем повысить точность идентификации более, чем в 2 раза.

**Список литературы:**

1. *Данилов Л.В.* Теория нелинейных электрических цепей / *Л.В. Данилов, Л.Н. Матханов, В.С. Филиппов* – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 256 с.
2. *Пупков К.А.* Методы классической и современной теории автоматического управления. Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления: Учебник для ВУЗов. Т. 2, 2–е изд. / *К.А. Пупков, Н.Д. Егупов*. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. – 638 с.
3. *Doyle F.J.* Identification and Control Using Volterra Models / *F.J. Doyle, R.K. Pearson, B.A. Ogunnaike* – Published Springer Technology & Industrial Arts, 2001. – 314 p.
4. *Giannakis G.B.* A bibliography on nonlinear system identification and its applications in signal processing, communications and biomedical engineering / *G.B. Giannakis, E. Serpedin* // Signal Processing – EURASIP, Elsevier Science B.V., 2001. – Vol. 81. – №. 3. – P. 533-580.
5. *Cheng C.M.* Volterra-series-based nonlinear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review / *C.M. Cheng, Z.K. Peng, W.M. Zhang, G. Meng* // Mechanical Systems and Signal Processing – November, 2016. – P. 1-25.
6. *Pavlenko V.* Identification of systems using Volterra model in time and frequency domain / *V. Pavlenko, S. Pavlenko, V. Speransky* // In book: "Advanced Data Acquisition and Intelligent Data Processing". *V. Haasz and K. Madani* (Eds.). Chapter 10. – River Publishers, 2014. – P. 233-270.
7. *Pavlenko V.* Modified Approximation Method for Identification of Nonlinear Systems Using Volterra Models in Frequency Domain / *V. Pavlenko, V. Speransky, V. Ilyin, V. Lomovoy* // Applied Mathematics in Electrical and Computer Engineering: Proc. of the AMERICAN-MATH'12 & CSST'12 & CEA'12, Harvard, Cambridge, USA, January 25–27, 2012. Published by WSEAS Press, 2012. – P. 423-428.
8. *Pavlenko V.* Interpolation Method of Nonlinear Dynamical Systems Identification Based on Volterra Model in Frequency Domain / *V. Pavlenko, S. Pavlenko, V. Speransky* // Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS'2013), 15-17 September 2013, Berlin, Germany. – 2013. – Vol. 2. – P. 138-142.
9. *Pavlenko V.D.* Analysis of Identification Accuracy of Nonlinear System Based on Volterra Model in Frequency Domain / *V.D. Pavlenko, V.O. Speransky* // American Journal of Modeling and Optimization. – 2013. – 1 (2). – P. 11-18.
10. *Тихонов А.Н.* Методы решения некорректных задач / *А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин*. – М.: Наука, 1979. – 288 с.

11. Тихонов А.Н. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский, В.В. Степанов. – М.: Наука, 1983. – 200 с.
12. Павленко С.В. Регуляризация процедуры идентификации нелинейных систем в виде моделей Вольтерра / С.В. Павленко, В.Д. Павленко // Идентификация систем и задачи управления: Труды X Международной конференции SICPRO'15, Москва 26-29 января 2015 г., Ин-т проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – М.: ИПУ РАН, 2015. – С. 230-238.
13. Павленко С.В. Применение вейвлет-фильтрации в процедуре идентификации нелинейных систем на основе моделей Вольтерра / С.В. Павленко // Вост.-европ. журн. передовых технологий. – Харьков, 2010. – № 6/4 (48). – С. 65-70.
14. Pavlenko V. Polyharmonic Test Signals Application for Identification of Nonlinear Dynamical System / V. Pavlenko, V. Speransky // The Second IEEE International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics (UkrMiCo'2017), 11-15 September 2017 Odessa, Ukraine: Collection of Proceedings of the Scientific and Technical Conference. – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2017. – P. 86-90.

**References:**

1. Danilov, L.V., Matkhanov, L.N., and Filippov, V.S. (1990), *Theory of nonlinear electrical circuits*, L., Energgoatomizdat, 256 p.
2. Pupkov, K.A., and Egupov, N.D. (2004), *Methods of classical and modern automatic control theory. Statistical dynamics and identification of automatic control systems: Textbook for Universities*. Vol. 2, 2nd ed., N.E. Bauman MGTU, 638 p.
3. Doyle, F.J., Pearson, R.K., and Ogunnaike, B.A. (2001), *Identification and Control Using Volterra Models*. – Published Springer Technology & Industrial Arts, 314 p.
4. Giannakis, G.B., and Serpedin, E. (2001), "A bibliography on nonlinear system identification and its applications in signal processing, communications and biomedical engineering". *Signal Processing – EURASIP*, Elsevier Science B.V., Vol. 81, No. 3, pp. 533-580.
5. Cheng, C.M., Peng, Z.K., Zhang, W.M., and Meng, G. (2016), "Volterra-series-based nonlinear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review". *Mechanical Systems and Signal Processing*, November, pp. 1-25.
6. Pavlenko, V., Pavlenko, S., Speransky, V. (2014), "Identification of systems using Volterra model in time and frequency domain". In book: *Advanced Data Acquisition and Intelligent Data Processing*. V. Haasz and K. Madani (Eds.). Chapter 10. – River Publishers, pp. 233-270.
7. Pavlenko, V., Speransky, V., Ilyin, V., and Lomovoy, V. (2012), "Modified Approximation Method for Identification of Nonlinear Systems Using Volterra Models in Frequency Domain". *Applied Mathematics in Electrical and Computer Engineering: Proc. of the AMERICAN-MATH'12 & CSST'12 & CEA'12*, Harvard, Cambridge, USA, January 25–27, 2012. Published by WSEAS Press, pp. 423-428.
8. Pavlenko, V., Pavlenko, S., and Speransky, V. (2013), "Interpolation Method of Nonlinear Dynamical Systems Identification Based on Volterra Model in Frequency Domain". *Proceedings of the 7th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS'2013)*, 15-17 September 2013, Berlin, Germany. Vol. 2, pp. 138-142.
9. Pavlenko, V.D., and Speransky, V.O. (2013), "Analysis of Identification Accuracy of Nonlinear System Based on Volterra Model in Frequency Domain". *American Journal of Modeling and Optimization*, 1 (2), pp. 11-18.

- 
- 10.** Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Y. (1979), *Methods for solving ill-posed problem*, Nauka, Moscow, 288 p.
- 11.** Tikhonov, A.N., Goncharsky, A.V., Stepanov, V.V. and oth. (1983), *Regularizing algorithms and a priori information*. Nauka, Moscow, 200 p.
- 12.** Pavlenko, S.V., Pavlenko, V.D. (2015), "Regularization of an Identification Procedure of Non-linear Systems in the Form of the Volterra Models", Proceedings of the X International Conference "*System Identification and Control Problems*", SICPRO'15, Moscow, January 26-29, 2015. Moscow: V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAN, pp. 230-238. ISBN 978-5-91450-162-1.
- 13.** Pavlenko, S.V. (2010), "Application of wavelet filtering in the process of identification of nonlinear systems based on Volterra models", *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Kharkiv, No 6/4(48), pp. 65-70.
- 14.** Pavlenko, V., and Speransky, V. (2017). "Polyharmonic Test Signals Application for Identification of Nonlinear Dynamical System". *The Second IEEE International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics (UkrMiCo'2017)*, 11-15 September 2017 Odessa, Ukraine: Collection of Proceedings of the Scientific and Technical Conference. – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, pp. 86-90.

*Статью представил д-р техн. наук, проф. НТУ "ХПІ" Заковоротний А.Ю.*

*Поступила 15.09.2018*

Pavlenko Vitaliy, Dr. Sci. Tech, Professor  
Odessa National Polytechnical University  
Ave. Shevchenko, 1, Odessa, Ukraine, 65044  
tel./phone: (048) 705-8-436, e-mail: pavlenko\_vitalij@ukr.net  
ORCID ID: 0000-0002-5655-4171

Pavlenko Sergey, PhD, Senior Researcher  
Odessa National Polytechnical University  
Ave. Shevchenko, 1, Odessa, Ukraine, 65044  
tel./phone: (098) 289-77-83, e-mail: psv85@yandex.ru  
ORCID ID: 0000-0002-9721-136X

Lomovoy Vladimir, Magister  
National University "Odessa Maritime Academy"  
Str. Didrihsone, 8, Odessa, Ukraine, 65029  
tel./phone: (063) 157-86-83, e-mail: lomovoy\_vi@ukr.net  
ORCID ID: 0000-0003-0864-3839

УДК 681.5.015.52

**Обчислювальні засоби побудови моделей Вольтерра нелінійних динамічних систем в частотній області / Павленко В.Д., Павленко С.В., Ломовий В.І. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2018. – № 42 (1318). – С. 48 – 63.**

Досліджується точність та обчислювальна стійкість методів детермінованої ідентифікації нелінійних динамічних систем у вигляді багатовимірних АЧХ та ФЧХ. Розглядаються апроксимаційні та інтерполяційні методи ідентифікації з використанням як тестових полігармонічних сигналів. Обчислювальна стійкість процедури ідентифікації забезпечується застосуванням методу регуляризації некоректних задач. Для згладжування оцінок отриманих характеристик використовується вейвлет-фільтрація. Ил.: 9. Табл.: 2. Бібліогр.: 14 назв.

**Ключевые слова:** нелінійні динамічні системи; методи ідентифікації; моделі Вольтерра; багатовимірні АЧХ і ФЧХ; регуляризація; вейвлет-фільтрація.

УДК 681.5.015.52

**Вычислительные методы построения моделей Вольтерра нелинейных динамических систем в частотной области / Павленко В.Д., Павленко С.В., Ломовой В.И. // Вестник НТУ "ХПИ". Серія: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПИ". – 2018. – № 42 (1318). – С. 48 – 63.**

Исследуется точность и вычислительная устойчивость методов детерминированной идентификации нелинейных динамических систем в виде многомерных АЧХ и ФЧХ. Рассматриваются аппроксимационный и интерполяционный методы идентификации с использованием в качестве тестовых полигармонических сигналов. Вычислительная устойчивость процедуры идентификации обеспечивается применением метода регуляризации некоректных задач. Для сглаживания оценок получаемых характеристик используется вейвлет-фильтрация. Ил.: 9. Табл.: 2. Библиогр.: 14 назв.

**Ключевые слова:** нелинейные динамические системы; методы идентификации; модели Вольтерра; многомерные АЧХ и ФЧХ; регуляризация; вейвлет-фильтрация.

UDC 681.5.015.52

**Computational tools for building Volterra models of nonlinear dynamic systems in the frequency domain / Pavlenko V.D., Pavlenko S.V., Lomovoy V.I. // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2018. – №.42 (1318). – P. 48 – 63.**

The accuracy and computational stability of deterministic identification methods for nonlinear dynamical systems in the form of multidimensional frequency characteristics of amplitude and phase are investigated. Approximation and interpolation methods of identification with use of test polyharmonic signals are considered. The computational stability of the identification procedure is provided by the method of regularization of ill-posed problems. Wavelet filtering is used to smooth the estimates of the obtained characteristics. Figs.: 9. Tabl.: 2. Refs.: 14 titles.

**Keywords:** nonlinear dynamical systems; methods of identification; Volterra model; multidimensional frequency characteristics of amplitude and phase; regularization; wavelet filtering.