

УДК:519.711.3

DOI: 10.20998/2411-0558.2019.13.05

А. Х. ТОЙИРОВ, PhD., Термезский государственный университет,
Термез,

Х. Ф. ХОЛТУРАЕВ, асс., Ташкентский институт инженеров
ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент

О ПРОБЛЕМЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В статье с использованием метода малых возмущений получены математические модели гидродинамической устойчивости для однофазных потоков. Для аппроксимаций уравнений устойчивости применяется спектрально-сеточный метод. Он объединяет в себе высокую точность спектрального метода неравномерных сеток и позволяет определить сразу все собственные значения рассматриваемой проблемы. Ил.: 1. Табл.: 1. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость; метод малых возмущений; аппроксимация уравнений устойчивости; спектрально-сеточный метод; метод неравномерных сеток.

Постановка проблемы и анализ литературы. Математические модели, характеризующие движение вязкой несжимаемой жидкости, описываются уравнениями Навье-Стокса [1 – 3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u , v – продольная и поперечная компоненты скорости несжимаемой жидкости; p – давление, $Re = \rho UL/\mu$ – числа Рейнольдса; ρ – плотность; μ – вязкость жидкости; U и L – характерные масштабы скорости и длины соответственно.

Для исследования устойчивости решения системы (1) представим, как обычно, продольную компоненту скорости и давление в виде суперпозиции основного ламинарного течения $U(y)$ и малого возмущения:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, t), \\ \vartheta(x, y, t) &= \tilde{\vartheta}(x, y, t), \\ p(x, y, t) &= P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Систему (1) записуємо з урахуванням (2) і, залишаючи в отриманих рівняннях тільки члени першого порядку малості по відношенню до збурень, маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{\vartheta} \frac{dU}{dy} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2 U}{dy^2} + \Delta \tilde{u} \right), \\ \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\vartheta}, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial y} &= 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Якщо врахувати, що основне течія само по собі задовольняє рівнянням Нав'є-Стокса, т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

то система (3) приймає вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{\vartheta} \frac{dU}{dy} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{u}, \\ \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial x} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\vartheta}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Вводимо функцію току для збурюючого руху в вигляді

$$\Psi(x, y, t) = \psi(y) \cdot e^{i(kx - \omega t)}, \quad (6)$$

де $\psi(y) = \psi_r + i\psi_i$ – комплексна амплітуда збурень; k – дійсна величина, пов'язана з довжиною ℓ – хвилі збурення співвідношенням $\ell = 2\pi/k$. Величина ω – комплексна, $\omega = \omega_r + i\omega_i$, де

ω_r – круговая частота отдельного колебания, а ω_i – коэффициент нарастания, т.е. величина, позволяющая судить, нарастает или затухает колебание. Если $\omega_i < 0$, то колебание затухает и ламинарное течение устойчиво, если же $\omega_i > 0$, то имеет место неустойчивость. Кроме величин k и ω целесообразно ввести также их отношение $\lambda = \omega / k = \lambda_r + i\lambda_i$. Величина λ_r представляет собой скорость распространения волн в направлении x (фазовая скорость), а λ_i опять является величиной, позволяющей судить о затухании или возрастании колебания.

Амплитуда $\psi(y)$ возмущающего движения принята зависящей только от переменной y потому, что основное течение также зависит только от y . Для функции тока (6) имеем

$$\tilde{u} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \psi'(y)e^{i(kx - \omega t)}, \quad \tilde{v} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -ik\psi(y)e^{i(kx - \omega t)},$$

тем самым интегрируется уравнение неразрывности (5), а из системы (4) получаем проблему на собственные значения для уравнения Орра – Зоммерфельда [1, 4 – 8]:

$$\frac{1}{ikRe} D^2 \psi - \left((U(\eta) - \lambda)D + \frac{d^2 U}{d\eta^2} \right) \psi = 0, \quad (7)$$

$$\eta_0 < \eta < \eta_l,$$

$$\psi(\eta_0) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_0) = 0, \quad \psi(\eta_l) = \frac{d\psi}{d\eta}(\eta_l) = 0 \quad (8)$$

с однородными краевыми условиями, которые означают требования непроницаемости и прилипания. Здесь $D = \frac{d^2}{d\eta^2} - k^2$ – дифференциальный оператор; $U(\eta)$ – профиль скорости основного течения; η – координата, направленная поперек основного течения; k – волновое число; Re – число Рейнольдса; $\psi(\eta)$ – амплитуды функции тока для возмущений; $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ – собственные значения задачи, где λ_r – фазовая скорость волнового возмущения; λ_i – коэффициент нарастания. Если $\lambda_i > 0$, то течение неустойчиво, если $\lambda_i < 0$, то оно устойчиво. Если же $\lambda_i = 0$, то колебания нейтрально устойчивы.

В работах [1, 4 – 8] исследование методы нахождения собственных значений для уравнения Орра-Зоммерфельда. В работе [2] исследован эффективный метод решения уравнения Орра-Зоммерфельда. А в работах [3, 9 – 11] созданы математические модели задач о гидродинамической устойчивости однофазных потоков. Однако существующие методы численного моделирования гидродинамической устойчивости весьма трудоемки, что требует разработки новых методов для исследования гидродинамики и устойчивости.

Цель статьи – изложить новый спектрально-сеточный метод (ССМ) – эффективный математический аппарат для численного моделирования проблемы гидродинамической устойчивости. Он объединяет в себе высокую точность спектральных методов с экономичностью метода неравномерных сеток и позволяет определить сразу все собственные значения задачи.

ССМ предназначен для моделирования уравнения устойчивости однофазных гидродинамических систем, описываемых проблемой на собственные значения (7) – (8). Интервал интегрирования $[\eta_0, \eta_l]$ разобьем на сетку и получим N различных элементов:

$$[\eta_0, \eta_1], [\eta_1, \eta_2], \dots, [\eta_j, \eta_{j+1}], \dots, [\eta_{N-1}, \eta_N].$$

Дифференциальное уравнение (7) на каждом из этих элементов принимает вид

$$D^2 \psi_j - ikRe[(U_j(\eta) - \lambda)D - U_j''(\eta)]\psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Краевые условия (8) записываются в точках η_0 и η_N :

$$\psi_1(\eta_0) = \frac{d\psi_1}{d\eta}(\eta_0) = 0, \quad \psi_N(\eta_N) = \frac{d\psi_N}{d\eta}(\eta_N) = 0. \quad (10)$$

Во внутренних узлах сетки потребуем непрерывность решения уравнения (9) и его производных до 3-го порядка:

$$\psi_j^{(t)}(\eta_j) = \psi_{j+1}^{(t)}(\eta_j), \quad t = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (11)$$

где t указывает порядок производной.

Для представления решения уравнений (9) – (11) в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода каждый элемент $[\eta_j, \eta_{j+1}]$ отображаем на интервал $[-1, 1]$. После этого преобразования уравнения (9) принимают вид

$$L_j \psi_j = \{D_j^2 - ik_j \operatorname{Re}_j [(U_j(o') - \lambda) D_j - U_j''(o')]\} \psi_j = 0, \quad (12)$$

$$j = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$D_j = \frac{d^2}{dy_j^2} - k_j^2, \quad k_j = \frac{l_j}{2} k, \quad \operatorname{Re}_j = \frac{l_j}{2} \operatorname{Re}.$$

Из условий (10), (11) имеем

$$\psi_1(-1) = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dy}(-1) = 0,$$

$$l_j^{-t} \psi_j^{(t)}(+1) = l_{j+1}^{-t} \psi_{j+1}^{(t)}(-1),$$

$$t = 0, 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad (13)$$

$$\psi_N(+1) = 0, \quad \frac{d\psi_N}{dy}(+1) = 0,$$

через $l_j = \eta_j - \eta_{j-1}$ обозначена длина j -го элемента сетки.

Приближенное решение задачи (12) – (13) на каждом из элементов сетки ищем в виде

$$\psi_j(y) = \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n(y),$$

$$U_j(y_e^j) = \sum_{n=0}^{p_j} b_n^{(j)} T_n(y_e^j), \quad (14)$$

$$y_e^j = \cos(\pi \cdot l / p_j), \quad l = 0, 1, 2, \dots, p_j; \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где $T_n(y)$ – полиномы Чебышева первого рода, y_l^j – их узлы, а p_j – количество полиномов, используемых для аппроксимации решения на j -м элементе.

Подставляя ряды (14) в уравнение (12), потребуем, чтобы левая часть (12) на каждом из элементов сетки была ортогональной к первым $(p_j - 4)$ -м полиномам Чебышева:

$$(L_j \psi_j, T_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, p_j - 4, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

где $(f, g) = \int_{-1}^{+1} f(x)g(x)(1-x^2)^{-1/2} dx$ – скалярное произведение на отрезке $[-1, 1]$.

Кроме того, еще потребуем, чтобы ряд по полиномам Чебышева (14) точно удовлетворял краевым условиям и условиям непрерывности (13). С учетом следующих свойств полиномов Чебышева $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$ и $T_n'(\pm 1) = (\pm 1)^{n-2} n^2$ эти условия записываются в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{p_1} (-1)^n a_n^0 &= 0, & \sum_{n=0}^{p_1} (-1)^{n-1} n^2 a_n^{(1)} &= 0, & \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} &= \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^n a_n^{(j+1)}, \\ \frac{1}{l_j} \sum_{n=0}^{p_j} n^2 a_n^{(j)} &= \frac{1}{l_{j+1}} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} (-1)^{n-1} n^2 a_n^{(j+1)}, \\ \frac{1}{l_j^2} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n''(+1) &= \frac{1}{l_{j+1}^2} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j+1)} T_n''(-1), \\ \frac{1}{l_j^3} \sum_{n=0}^{p_j} a_n^{(j)} T_n'''(+1) &= \frac{1}{l_{j+1}^3} \sum_{n=0}^{p_{j+1}} a_n^{(j+1)} T_n'''(-1), \quad j = 1, 2, 3, \dots, N-1, \\ \sum_{n=0}^{p_N} a_n^{(N)} &= 0, & \sum_{n=0}^{p_N} n^2 a_n^{(N)} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, для определения $\bar{m} = N(p_j + 1)$ неизвестных $a_n^{(j)}$, $n = 0, 1, 2, \dots, p_j$; $j = 1, 2, 3, \dots, N$ имеем $\bar{m} = N(p_j + 1)$ уравнений. Этими уравнениями служат $N(p_j - 3)$ уравнений ортогональности (15), $4(N - 1)$ условий непрерывности и четыре граничных условия из (16). Полученную систему удобно записать в матричном виде:

$$(A - \lambda B)X = 0, \quad (17)$$

где комплексные матрицы A и B имеют блочно-диагональную структуру специального вида, а вектор x содержит коэффициенты $a_n^{(j)}$ в разложении (14), т.е.

$$x^T = (a_0^0, a_1^0, \dots, a_{p_1}^0, a_0^1, a_1^1, \dots, a_{p_2}^1, \dots, a_0^{(N)}, a_1^{(N)}, \dots, a_{p_N}^{(N)}).$$

Характерная особенность системы (17) в том, что матрица B вырождена (поскольку условия (16) не зависят от λ) и содержит $4N$ нулевых строк, где N – число элементов сетки.

Сравнение спектрального метода и спектрально-сеточного метода. Рассмотрим построение алгебраического преобразования для матричных уравнений устойчивости (17). Данная система с помощью невырожденного линейного преобразования Q сводится к виду

$$(AQ - \lambda BQ)(Q^{-1}x) = 0. \quad (18)$$

После применения преобразования Q число строк и столбцов комплексных матриц A и B уменьшится на $4N$, где N – число элементов. Отношение общего число уравнений \bar{m} к числу оставшихся $\bar{m} = 4N$ уравнений составляет

$$q = \frac{\bar{m}}{\bar{m} - 4N}. \quad (19)$$

Таким образом, в результате разбиения интервала интегрирования на элементы, размерность каждой из комплексных матриц (вещественная и мнимая часть) A и B в исходной алгебраической системе уменьшается в q^2 раз. Снижение размерности особенно заметно при небольшом числе полиномов на каждом из элементов. Действительно, количество полиномов на j -м элементе равно $p_j + 1$ ($j = 1, 2, 3, \dots, N$). Тогда общее количество полиномов и соответственно алгебраических уравнений равно

$$\bar{m} = \sum_{j=1}^N (p_j + 1).$$

Заметим, что p_j не должно быть меньше, чем порядок старшей производной дифференциального уравнения, т.е. $p_j \geq 4$. При $p_j = 4$, например, для всех j , $\bar{m} = 5N$, $q = 5$. Это означает, что число уравнений в системе уменьшается в 5 раз, а размерности каждой из комплексных матриц A и B – в 25 раз.

Из оставшихся уравнений получается алгебраическая система существенно меньшей размерности:

$$(T - \lambda W)Y = 0, \quad (20)$$

$$Y = Q^{-1}\bar{x}, \quad \bar{x} = (a_4^0, \dots, a_{p_1}^0, a_4^0, \dots, a_{p_2}^0, \dots, a_4^{(N)}, \dots, a_{p_N}^{(N)}),$$

где W – в общем случае невырожденная квадратная матрица.

Умножая (20) слева на матрицу W^{-1} , получаем

$$(D - \lambda E)Y = 0, \quad D = TW^{-1}. \quad (21)$$

Собственные значения системы (21) могут быть найдены стандартными методами. В данной работе они определяются с помощью QR -алгоритма.

Для решения системы вида (21) один шаг QR -алгоритма требует

$$Z = \left(\frac{20}{3}\right)n^3$$

арифметических операций. В таблице сравнены спектральный метод (СМ)¹ и ССМ по числу арифметических операций Z .

Таблица

Сравнение методов СМ и ССМ по числу арифметических операций

\bar{m}	СМ	ССМ	
	Z	N	Z
5	6	1	6
10	1440	2	53
20	27306	4	426
30	117173	6	1440
40	311040	8	3414
50	648906	10	6666
60	1170773	12	27306
70	1916640	14	70986
80	2926507	16	146346
90	4240373	18	262026
100	5898240	20	426666

Эффективность ССМ, приведенного в таблице, наиболее наглядно иллюстрируется на рисунке, где через Z обозначено число арифметических операций.

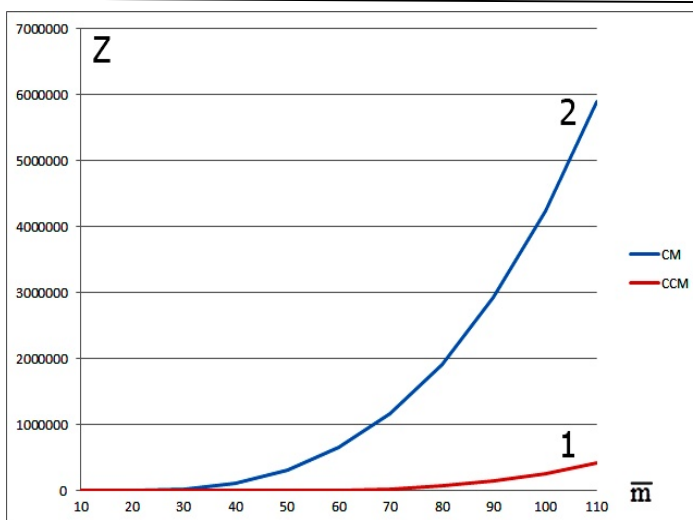


Рис. Кривая 1 – ССМ, кривая 2 – СМ.

При этом высокая точность ССМ сохраняется.

Выводы. Предложен новый спектрально-сеточный метод для исследования гидродинамической устойчивости. Выполнено сравнение ССМ и СМ по числу арифметических операций при решении стандартной проблемы на собственные значения с комплексной матрицей. Показано, что спектрально-сеточный метод экономичен и имеет высокую точность при решении проблемы гидродинамической устойчивости.

Список литературы:

1. Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation / S.A.Orszag // *Journal fluid mech*, 1971. – Vol 4 (50). – P. 689-701.
2. Нармурадов Ч.Б. Об одном эффективном методе решения уравнения Орра-Зоммерфельда. / Ч.Б. Нармурадов // Математическое моделирование. – Москва. – 2005. – № 9 (17). – С. 35-42.
3. Абуталиев Ф.Б. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости / Ф.Б. Абуталиев, Ч.Б. Нармурадов // *Fan va texnologiya*. – Ташкент. – 2011. – С. 188.
4. Крылов А.А. Решение задачи о собственных значениях для уравнения Орра-Зоммерфельда разностным методом / А.А. Крылов, И.Д. Мальхина // *Вычисл. методы и программирование*. – Москва. – 1968. – Вып.11. – С. 44-54.
5. Жарилкасинов А. Применение неравномерной сетки для численного решения задача Орра-Зоммерфельда / А. Жарилкасинов, В.Д. Лисейкин, Б.Ю. Скобелев, Н.Н. Яненко // *Числен. методы механики сплошной среды*. – Новосибирск, 1983. – № 5 (14). – С. 45-54.
6. Жарилкасинов А. Эффективная неравномерная сетка для уравнения Орра-Зоммерфельда и спектр течения Пуазейля / А. Жарилкасинов, Б.Ю. Скобелев,

Н.Н. Яненко. – Новосибирск, 1984. – С.35. (Препринт/РАН. Сиб. Отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. Мех. № 21).

7. Слепцов А.Г. Проекционно-сеточные методы решения задач Орра-Зоммерфельда / А.Г. Слепцов // Числен. методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1983. – № 5 (14). – С. 111-126.

8. Желтухин Н.А. Детерминантный метод решения уравнения Орра-Зоммерфельда / Н.А. Желтухин // Аэрогазодинамика: Тр. Сиб. конф. по аэродинамике, Июль-август. – Новосибирск, 1973. – С. 70-73.

9. Нормуратов Ч.Б. Математические модели проблемы гидродинамической устойчивости для однофазных потоков / Ч.Б. Нормуратов, Ш.А. Менглиев, К.А. Гулямкадиоров // Вычислительные математические задачи. – 2017. – № 1 (7). – С. 41-47.

10. Normurodov CH.B. Mathematical modeling movement of liquids in tubes / CH.B. Normurodov, SH.A. Mengliyev // Problems of computational and applied mathematics. – 2018. – Vol. 2. – P. 36-47.

11. Gordin V.A. Differential and difference equations / V.A. Gordin // Higher School of Economics. – 2016. – Moscow. – 517 p.

References:

1. Orszag, S.A. (1971), "Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation", *Journal fluid mech*, vol. 4 (50), pp. 689-701.

2. Narmuradov, Ch.B. (2005), "On one effective method for solving the Orr-Sommerfeld equation", *Math modeling*, Moscow, No. 9 (17), pp. 35-42.

3. Abutaliev, F.B. and Narmuradov, Ch.B. (2011), *Mathematical modeling of the problem of hydrodynamic stability*, Science and technology, Tashkent, pp. 188.

4. Krylov, A.A., and Malykhina, I.D. (1968), "Solving the eigenvalue problem for the Orr-Sommerfeld equation by the difference method", *Calculated. methods and programming*. Moscow, Issue 11, pp. 44-54.

5. Zharilkasinov, A., Liseikin, V.D., Skobelev, B.Yu. and Yanenko, N.N. (1983), "The use of non-uniform grids for the numerical solution of the Orr-Somerfeld problem", *Number continuum mechanics methods*, Novosibirsk, No. 5 (14), pp. 45-54.

6. Zharilkasinov, A., Skobelev, B.Yu. and Yanenko, N.N. (1984), *Effective non-uniform grid for the Orr-Sommerfeld equation and the Poiseuille flow spectrum*, Novosibirsk, p. 35. (Preprint/Russian Academy of Sciences. Sib. Separate. Inst. Theoretical and adj. Mech. No. 21.

7. Sleptsov, A.G. (1983), "Projection-grid methods for solving Orr-Sommerfeld problems", *Number methods of continuum mechanics*, Novosibirsk, No. 5 (14), pp. 111-126.

8. Zheltukhin, N.A. (1973), "The determinant method for solving the Orr-Sommerfeld equation", *Aerogasdynamics: Tr. Sib. konf. on aerodynamics July-August*, Novosibirsk, pp. 70-73.

9. Normuradov, Ch.B., Mengliyev, S.A. and Gulyamkadirov, K.A. (2017), "Mathematical models of the problem of hydrodynamic stability for single-phase flows", *Computational Mathematical Problems*, No. 1 (7), pp. 41-47.

10. Normurodov, CH.B., Mengliyev, SH.A. (2018), "Mathematical modeling of liquids in tubes". *Problems of computational and applied mathematics*, vol. 2, pp. 36-47.

11. Gordin, V.A. (2016), *Differential and difference equations*, Higher School of Economics, Moscow, 517 p.

Статью представил доктор техн. наук, проф. Б.А. Худаяров, зав. кафедры "Высшая математика", Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент.

Поступила (received) 14.04.2019

Toyirov Akbar Khasanovich, PhD
Termiz State University.
Str. Fayzulla Khujayev, 1A 13, Termiz, Uzbekistan, 190100,
Tel: +99897 242-31-50, e-mail: akbartoyirov@gmail.com
ORCID ID: 0000-0002-3664-8488

Kholturaev Khol Said Fayzullaevich, Ass
Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers
Higher mathematics,
Str. Kari Niyaziy, 39, Tashkent, Uzbekistan, 100000,
Tel: +99890 975-22-93, e-mail:
ORCID ID: 0000-0002-4542-1230

УДК 519.711.3

Про проблему гідродинамічної стійкості / Тойіров А.Х., Холтураєв Х.Ф. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2019. – № 1. – С. 28 – 39.

У статті з використанням методу малих збурень отримані математичні моделі гідродинамічної стійкості для однофазних потоків. Для аппроксимаций рівнянь стійкості застосовується спектрально-сітковий метод. Він об'єднує в собі високу точність спектрального методу нерівномірних сіток і дозволяє визначити відразу всі власні значення розглянутої проблеми. Ил.: 1. Табл.: 1. Бібліогр.: 11 назв.

Ключові слова: гідродинамічна стійкість; метод малих збурень; аппроксимация рівнянь стійкості; спектрально-сітковий метод; метод нерівномірних сіток.

УДК 519.711.3

О проблеме гидродинамической устойчивости / Тойиров А.Х., Холтураев Х.Ф. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2019. – № 1. – С. 28 – 39.

В статье с использованием метода малых возмущений получены математические модели гидродинамической устойчивости для однофазных потоков. Для аппроксимаций уравнений устойчивости применяется спектрально-сеточный метод. Он объединяет в себе высокую точность спектрального метода неравномерных сеток и позволяет определить сразу все собственные значения рассматриваемой проблемы. Ил.: 1. Табл.: 1. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость; метод малых возмущений; аппроксимация уравнений устойчивости; спектрально-сеточный метод; метод неравномерных сеток.

UDC 519.711.3

On the problem of hydrodynamic stability / Toyirov A.Kh., Kholturaev Kh.F. // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2019. – №.1. – С. 28 – 39.

Mathematical models of hydrodynamic stability for single-phase flows are obtained in papers using the small perturbation method. The spectral-grid method is used to approximate the stability equations. It combines the high accuracy of the spectral method of non-uniform grids and allows you to immediately determine all the eigenvalues of the problem under consideration. Figs.: 1. Tabl.: 1. Refs.: 11 titles.

Keywords: hydrodynamic stability; small perturbation method; approximate the stability equations; spectral-grid method; non-uniform grid method.