ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

УДК 519.161 **DOI: 10.20998/2411-0558.2019.28.04**

О. Б. МАЦИЙ, канд. техн. наук, доц. КТМ ХНАДУ, Харьков

ПЕРЕСТАНОВОЧНО-МАТРИЧНЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ОПТИМАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Работа содержит результаты исследований по совершенствованию известных алгоритмов нахождения максимальных паросочетаний с минимальным суммарным весом рёбер. Предложена новая перестановочно-матричная модель оптимального назначения, которая, обеспечивает возможность рекурсивного нахождения решений на множестве увеличивающих путей, построенных относительно текущего паросочетания. Ил.: 4. Библиогр.: 10 назв.

Ключевые слова: алгоритм; паросочетание; оптимальное назначение; увеличивающий путь; перестановочно-матричная модель.

Постановка проблемы. Выполненные в данной работе исследования направлены на развитие недавних результатов в области комбинаторной оптимизации, образующих математический аппарат транспортной логистики.

К широкому спектру моделей транспортной логистики относятся модели оптимизации замкнутых маршрутов (модели маршрутизации), которые содержат ряд условий и ограничений, присущих реальному процессу перемещения объектов на плоскости или в пространстве.

Поэтому задачи маршрутизации занимают ключевое место в экономически обоснованном принятии решений, ускоряющих выполнение транспортных работ.

Условия этих задач пересекаются с классической задачей маршрутизации (VRP – Vehicle Routing Problem), сформулированной Данцигом и Рамсером [1].

Анализ литературы. Широко известные методы решения задачи о назначениях (ЗН), такие, как венгерский метод, метод Кана-Мункреса и метод потенциалов, построены с использованием разных подходов, применяемых в комбинаторной оптимизации, и характеризуются разной временной сложностью, не меньшей, чем $O\left(n^3\right)$, где n – порядок матрицы стоимостей [2, 3, 4].

В [5] изложен алгоритм решения одного из вариантов ЗН, временная сложность которого понижена до $O\left(n^2\right)$.

В [6] показано, что он выполняет функции процедуры, встроенной в

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

метод ветвей и границ для быстрого вычисления более точных нижних оценок стоимости замкнутых маршрутов в задаче коммивояжера (ЗК).

Алгоритм состоит в нахождении взвешенного паросочетания минимального суммарного веса в двудольном графе с $2n$ вершинами, используя введенные в [2, 7] понятия кратчайшего увеличивающего пути. В данной работе описана новая перестановочно-матричная модель оптимального назначения, развивающая результаты работ [8, 9, 10].

Цель статьи. Предлагается перестановочно-матричная модель оптимального назначения, которая, обеспечивает возможность рекурсивного нахождения решений на множестве увеличивающихся путей, построенных относительно текущего паросочетания.

Основной раздел. Опишем рассматриваемый здесь метод решения ЗН, исходя из её формулировки в следующем виде.

Для матрицы стоимостей (весов) $C = \left[c_{ij} \right]_n$, где $c_{ij} \in R_0^+$ или $c_{ij} = \infty$, R_0^+ – множество неотрицательных действительных чисел, найти

$$C(\sigma) = \min_{\pi} \sum_{i=1}^{n} c_{\pi[i]}. \qquad (1)$$

Здесь $\pi = (\pi[1], \pi[2], ..., \pi[n])$ – перестановка множества $\{1, 2, …, n\}$ номеров столбцов матрицы C, $\sigma = (\sigma[1], \sigma[2], ..., \sigma[n])$ – оптимальная перестановка стоимостью $C(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} c_{\sigma[i]}$, $c_{\sigma[i]} \neq \infty$, $i = \overline{1, n}$, или решение ЗН.

Перестановку $\pi = (\pi[1], \pi[2], ..., \pi[n])$, в которой $c_{\pi[i]} \neq \infty$, $i = \overline{1, n}$, назовем допустимым решением ЗН.

Заметим, что ЗН с матрицей стоимостей, содержащей элементы $c = \infty$, может не иметь решения.

В этом случае необходимо установить, что множество допустимых решений задачи пусто.

Будем искать σ, пошагово увеличивая на единицу число элементов k, $k = \overline{1, n}$, последовательности, образующей определенную часть допустимого решения ЗН.

Рассмотрим свойства этой последовательности и способ её построения.

Любая часть допустимого решения ЗН, включающая k элементов,

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

однозначно определяет подматрицу $\left[c_{i_s j_t}\right]_k$ матрицы C, $i_1 < i_2 < \ldots < i_s < \ldots < i_k$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_t < \ldots < j_k$. Пусть последовательность $\pi_k = \left(\pi_k[i_1], \pi_k[i_2], \ldots, \pi_k[i_s], \ldots, \pi_k[i_k]\right)$, $\pi_k[i_s] \in \left\{j_1, j_2, \ldots, j_t, \ldots, j_k\right\}$, $k = \overline{1, n-1}$:

а) является решением ЗН для подматрицы $\left[c_{i_s j_t}\right]_k$;

б) стоимость π_k не больше стоимости решения ЗН для любой подматрицы порядка k матрицы C.

Если существует эффективная процедура преобразования последовательности π_k в последовательность π_{k+1}, $k = \overline{0, n-1}$, и задача (1) имеет решение, то на нахождение $\sigma = \pi_n$ требуется n шагов.

Покажем, как строятся последовательности π_k, $k = \overline{1, n}$.

Исходная последовательность $\pi_1 = \left(\pi_1[i_1]\right)$ определяется тривиально.

В матрице C находится $c_{lr} = \min\left\{c_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\right\}$, и, следовательно, $i_1 = l, \pi[i_1] = r$.

Чтобы получить $\pi_2 = \left(\pi_2[i_1], \pi_2[i_2]\right)$, определим $c_{ms} = \min\left\{c_{ij} \mid i \ne l,\ j \ne r\right\}$, $c_{lp} = \min\left\{c_{lj} \mid j \ne r\right\}$, $c_{vr} = \min\left\{c_{ir} \mid i \ne l\right\}$ (рис. 1).

		p	q		r		s	
m		c_{mp}					c_{ms}	
l		c_{lp}			c_{lr}			
v					c_{vr}		c_{vs}	
w			c_{wq}					

Рис. 1. Матрица С

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Нетрудно видеть, что если $c_{lr}+c_{ms}\le c_{lp}+c_{vr}$, то условия а) и б) выполняются для последовательности π_2, в которой $i_1=l,\ \pi_2[i_1]=r,\ i_2=m,\ \pi_2[i_2]=s$.

Ей соответствует подматрица

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & r & & & s \\ \hline
l & c_{lr} & & & \\ \hline
m & & & & c_{ms} \\ \hline
\end{array}.$$

Рис. 2. Подматрица с єлементами c_{lr} и c_{ms}

В противном случае этим условиям удовлетворяет последовательность π_2 с элементами $i_1=l,\ \pi_2[i_1]=p,\ i_2=v,\ \pi_2[i_2]=r$ и подматрицей

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & p & r \\ \hline
l & c_{lp} & c_{lr} \\ \hline
v & & c_{vr} \\ \hline
\end{array}.$$

Рис. 3. Подматрица с єлементами c_{lp} , c_{lr} и c_{vr}

Преобразуем последовательность π_2 в последовательность $\pi_3=\left(\pi_3[i_1],\ \ \pi_3[i_2],\ \ \pi_3[i_3]\right)$. Не теряя общности, предположим, что $\pi_2=\left(\pi_2[l]=r,\pi_2[m]=s\right)$. Найдем $c_{wq}=\min\left\{c_{ij}\mid i\ne l,m;\ j\ne s,r\right\}$ и $MIN1=c_{lr}+c_{ms}+c_{wq}$.

Заметим, что $c_{wq}=c_{ms}$, если $\pi_2=\left(\pi_2[l]=p,\pi_2[v]=r\right)$. Преобразование π_2 в π_3 является результатом решения следующей вспомогательной задачи. Для строк l, m и столбцов r, s, определяемых числами c_{lr} и c_{ms} матрицы C, требуется найти тройку элементов с минимальной суммой их значений при условии, что любые два элемента из тройки должны находиться в разных строках, включающих l, m, и разных столбцах, включающих r, s.

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Если искомая тройка не содержит c_{lr}, но содержит c_{ms}, то сумма значений её элементов ограничена снизу величиной $S_1 = c_{vr} + c_{lp} + c_{ms}$, где $c_{vr} = \min\{c_{ir} \mid i \neq l, m\}$, $c_{lp} = \min\{c_{lj} \mid j \neq r, s\}$.

Пусть решение вспомогательной задачи является тройкой, в которую входит c_{lr} и не входит c_{ms}. Тогда оно определяет сумму $S_2 = c_{lr} + c_{mp} + c_{vs}$, где $c_{mp} = \min\{c_{mj} \mid j \neq s, r\}$, $c_{vs} = \min\{c_{is} \mid i \neq l, m\}$.

Элементы решения вспомогательной задачи, не содержащего c_{lr} и c_{ms}, определяют величину $S_3 = \min\{c_{lp} + c_{mr} + c_{ws},\ c_{mq} + c_{ls} + c_{vr}\}$. Здесь $c_{ws} = \min\{c_{is} \mid i \neq l, m\}$, $c_{mr} = \min\{c_{mj} \mid j \neq p, s\}$ (рис. 4), $c_{ls} = \min\{c_{is} \mid i \neq m, v\}$, $c_{mq} = \min\{c_{mj} \mid j \neq r, s\}$.

		p	q		r		s	
m			c_{mq}				c_{ms}	
l					c_{lr}		c_{ls}	
v					c_{vr}			
w								

Рис. 4. Элементы решения вспомогательной задачи, не содержащей c_{lr} и c_{ms}, определяющие величину S_3, при условии

$$c_{ws} = \min\{c_{is} \mid i \neq l, m\},\ c_{mr} = \min\{c_{mj} \mid j \neq p, s\}$$

Определим величину, равную $MIN2 = \min\{S_1, S_2, S_3\}$. Ясно, что она соответствует искомой последовательности π_3, если $MIN2 \leq MIN1$, иначе $\pi_3 = (\pi_3[l] = r,\ \pi_3[m] = s,\ \pi_3[w] = q)$.

Будем считать, что в общем случае последовательность

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\pi_k = \left(\pi_k[i_1], \pi_k[i_2], ..., \pi_k[i_s], ..., \pi_k[i_k]\right)$$

со свойствами а) и б) преобразуется в последовательность

$$\pi_{k+1} = \left(\pi_{k+1}[i_1],\ \pi_{k+1}[i_2], ..., \pi_{k+1}[i_r], ..., \pi_{k+1}[i_{k+1}]\right)$$

с этими же свойствами следующим образом. В матрице C находится

$$c_{\pi_k[i_{k+1}]} = \min\left\{c_{ij} \mid i \neq i_1, i_2, ..., i_s, ..., i_k,\ j \neq \pi_k[i_1], \pi_k[i_2], ..., \pi_k[i_s], ..., \pi_k[i_k]\right\},$$

формируется последовательность $\pi_{k+1}^1 = \left(\pi_k, \pi_k[i_{k+1}]\right)$ и вычисляется

$$MIN1 = \sum_{s=1}^{k} c_{\pi_k[i_s]} + c_{\pi_k[i_{k+1}]}.$$

Далее решается задача нахождения k + 1 элементов, которые в матрице C доставляют минимальную сумму своих значений и располагаются в разных строках и столбцах, включая все строки и столбцы с номерами, задаваемыми величинами $c_{\pi_k[i_1]}$, $c_{\pi_k[i_2]}$, ..., $c_{\pi_k[i_s]}$, ..., $c_{\pi_k[i_k]}$.

Обозначим эту сумму *MIN2*. Найденные элементы образуют искомую последовательность $\pi_{k+1} = \pi_{k+1}^2$, если $MIN2 \leq MIN1$. Иначе $\pi_{k+1} = \pi_{k+1}^1$.

Выводы. Предложена новая перестановочно-матричная модель оптимального назначения, которая, обеспечивает возможность рекурсивного нахождения решений на множестве увеличивающих путей, построенных относительно текущего паросочетания.

Изложенная схема поиска оптимального назначения является основой метода, в котором решение задачи о назначениях (1) находится исключительно средствами теории паросочетаний для двудольных графов. Метод базируется на известном алгоритме нахождения максимальных паросочетаний в двудольных невзвешенных графах, который построен по схеме, расширяющей способы решения более трудоёмких оптимизационных задач [3, 5].

Список литературы:

1. *Бронштейн Е.М.* Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики / *Е.М. Бронштейн, Т.А. Зайко*. – Автоматика и телемеханика, 2010. – № 10. – С. 133-147.

2. *Пападимитриу Х.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / *Х. Пападимитриу, К. Стайглиц.* – М.: Мир, 1985. – 510 с.
3. *Саати Т.* Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы / *Т. Саати.* – М.: Мир, 1973. – 330 с.
4. *Шаріфов Ф.А. Оптимізація маршрутів повітряних суден, що виконують агроавіаційні роботи / Ф.А. Шаріфов, Г.М. Юн, Г.Ю. Кандиба* – Наукові технології, 2014. – № 3 (23).– С. 319-326.
5. *Pichugina O.S.* Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization / *O.S. Pichugina, S.V. Yakovlev.* – Cybernetics and Systems Analysis, 2016. – 52 (6). – P. 921-930.
6. *Левченко А.Ю.* Быстрый алгоритм решения задачи о назначениях для нахождения нижней границы стоимости маршрута коммивояжера / *А.Ю. Левченко, А.В. Морозов, А.В. Панишев.* – Искусственный интеллект. – 2011. – Вып. 4.– С. 406-416.
7. *Левченко А.Ю.* Механизм ускорения вычислений в методе Литтла для решения задач класса коммивояжера / *А.Ю. Левченко, А.В. Морозов, А.В. Панишев.* – Искусственный интеллект. – 2012. – Вып. 2. – С. 96-110.
8. *Matsiy O. B.* Recurrent Method to Solve the Assignment Problem / *O.B Matsiy, A.V. Morozov, A.V. Panishev.* – Cybernetics and Systems Analysis. – 2015. – 51 (6). – P. 939-946.
9. *Matsiy O.B.* A Recurrent Algorithm to Solve the Weighted Matching Problem / *O.B Matsiy, A.V. Morozov, A.V. Panishev.* – Cybernetics and Systems Analysis. – 2016. – 52 (5). – P. 748-757.
10. *Гаращенко И.В.* Метод решения гамильтоновой задачи коммивояжера / *И.В. Гаращенко, А.В. Морозов, А.В. Панишев.* – Искусственный интеллект. – 2008. – № 3. – С. 630-637.

References:

1. Bronstein, E.M., and Zaiko, T.A. (2010), "Deterministic optimization problems of transport logistics", *Automation and telemechanics,* Vol. 10, pp. 113-147.
2. Papadimitriou, H., and Steiglitz, K. (1985), *Combinatorial optimization. Algorithms and complexity*, Mir Publ., Moskow, pp 510.
3. Saati, T. (1973), *Integer optimization methods and related extreme problems*, Mir Publ., Moskow, pp. 330.
4. Sharifov, F.A. (2014), "Optimization of the route for the repatriation of ships, which will help to agroavit the robots", *Science of Technology*, № 3 (23), pp. 319-326.
5. Pichugina, O.S., and Yakovlev, S.V. (2016), "Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization", *Cybernetics and Systems Analysis*, 52 (6), pp. 921-930.
6. Levchenko, A.Yu., Morozov, A.V., and Panishev, A.V. (2011), "A quick algorithm for solving the assignment problem for finding the lower boundary of the cost of the traveling salesman route", *Artificial Intelligence*, № 4. pp. 406-416.
7. Levchenko, A. Yu., Morozov, A.V., and Panishev, A.V. (2012), "The acceleration mechanism of calculations in the Little method for solving problems of the traveling salesman class", *Artificial Intelligence*, № 2, pp. 96-110.
8. Matsiy, O.B., Morozov, A.V., and Panishev, A.V. (2015), "Recurrent Method to Solve the Assignment", *Cybernetics and Systems Analysis*, No. 51 (6), pp. 939-946.
9. Matsiy, O.B., Morozov, A.V., and Panishev, A.V. (2015), "A Recurrent Algorithm to Solve the Weighted Matching Problem", *Cybernetics and Systems Analysis*, No. 52 (5), pp. 748-757.

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

10. Garashchenko, I.V. Morozov, A.V., and Panishev, A.V. (2008), "The method of solving the Hamilton traveling salesman problem", *Artificial Intelligence*, No. 3. pp. 630-637.

Статью представил д-р техн. наук, проф. ХНАДУ Никонов О.Я.

Поступила (received) 14.11.2019

Matsiy Olha, Ph.D., Associate Professor
Kharkiv National Automobile and Hiqhway University
Str.Yaroslava Mudrogo, 25, Kharkov, Ukraine, 61002
Tel: 0671039312, e-mail: olga.matsiy@gmail.com
ORCID ID: 0000-0002-1350-9418

УДК 519.161

Перестановочность-матричний підхід до побудови оптимального призначення / Маций О.Б. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2019. – № 28 (1353). – С. 30 – 38.

Робота містить результати досліджень щодо вдосконалення відомих алгоритмів знаходження максимальних паросочетание з мінімальним сумарним вагою ребер. Запропоновано нову перестановочно-матричну модель оптимального призначення, яка, забезпечує можливість рекурсивного знаходження рішень на безлічі шляхів, що збільшують шляхів, побудованих щодо поточного паросполучення. Іл.: 4. Бібліогр.: 10 назв.

Ключові слова: алгоритм; паросочетание; оптимальне призначення; шляхі, що збільшуються; перестановочно-матрична модель.

УДК 519.161

Перестановочно-матричный подход к построению оптимального назначения / Маций О.Б. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2019. – № 28 (1353). – С. 30 – 38.

Работа содержит результаты исследований по совершенствованию известных алгоритмов нахождения максимальных паросочетаний с минимальным суммарным весом рёбер. Предложена новая перестановочно-матричная модель оптимального назначения, которая, обеспечивает возможность рекурсивного нахождения решений на множестве увеличивающих путей, построенных относительно текущего паросочетания. Ил.: 4. Библиогр.: 10 назв.

Ключевые слова: алгоритм; паросочетание; оптимальное назначение; увеличивающиеся пути; перестановочно-матричная модель.

UDC 519.161

The permutation-matrix approach to constructing the optimal assignment / Matsiy O.B. // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2019. – № 28 (1353). – P. 30 – 38.

The work contains the results of studies to improve the well-known algorithms for finding maximum matching with a minimum total weight of edges. A new permutation-matrix model of optimal assignment is proposed, which provides the possibility of recursively finding solutions on the set of magnifying paths constructed relative to the current matching. Figs.: 4. Refs.: 10 titles.

Keywords: algorithm; matching; optimal purpose; magnifying path; permutation-matrix model.