Вісник Національного технічного університету "ХПІ", 2022, № 1–2 (7-8)
ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

УДК 539.3 **DOI: 10.20998/2411-0558.2022.02.05**

М. К. УСАРОВ, д-р физ-мат. наук, проф., Академия наук Республики Узбекистан, "Институт механики и сейсмостойкости сооружений", Ташкент,
Ш. И. АСКАРХОДЖАЕВ, младший научный сотрудник, Академия наук Республики Узбекистан, "Институт механики и сейсмостойкости сооружений", Ташкент,
Д. К. ШАМСИЕВ, младший научный сотрудник, Академия наук Республики Узбекистан, "Институт механики и сейсмостойкости сооружений", Ташкент,
М. Ш. КУРБАНБАЕВ, младший научный сотрудник, Академия наук Республики Узбекистан, "Институт механики и сейсмостойкости сооружений", Ташкент

К РАСЧЕТУ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ БИМОМЕНТОВ

Работа посвящена разработке бимоментной теории и метода расчета толстых ортотропных пластин в рамках трехмерной теории упругости. Приводятся основные соотношения и уравнения движения пластины, построенные относительно сил, моментов и бимоментов, возникающих из-за нелинейности закона распределения перемещений и напряжений по её толщине. В качестве примера расчета рассмотрены изгиб и колебания изотропных и ортотропных пластин. Полученное решение показало эффективность и точность предложенной бимоментной теории при оценке напряженно-деформированного состояния толстых пластин. Библиогр.: 11 назв.

Ключові слова: толстая ортотропная пластина; трехмерная теория упругости; бимоментная теория; изгиб и колебания; напряженно-деформированное состояние.

Введение. Расчет пластин и оболочек занимает особое место в области исследовании элементов конструкции. С основными положениями общей методики построения уточненной теории пластин и оболочек можно ознакомиться в монографиях С.А. Амбарцумяна [1], К.З. Х.М. Муштари [2] и других. При построении общей теории пластин в рамках трехмерной задачи теории упругости исследователи используют различные методы [3 – 5], например, метод гипотез, метод разложения перемещений в ряд или метод асимптотического решения и т.д.

В пространственном случае деформирования пластины по её толщине имеют место нелинейные законы распределения перемещений. Следовательно, необходимо учитывать все компоненты тензора напряжения и деформации: σ_{ij}, ε_{ij}, $(i, j = 1{,}3)$. Отметим, что в этом случае,

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

в отличие от традиционного случая постановки задачи для описания поля пространственного деформирования пластины растягивающих и перерезывающих сил, изгибающих и крутящих моментов недостаточно, дополнительно необходимо учитывать и бимоменты. В данной статье вкратце приведены определяющие соотношения, уравнения движения, граничные условия бимоментной теории пластин, разработанной в [6 – 11].

Впервые разработана новая бимоментная теория и методики пространственого расчета толстых пластин без упрощающих гипотез, учитывающая нелинейного закона распределения в поперечных сечениях всех компонент перемещений, деформаций и напряжений. Построены точные выражения сил, моментов и бимоментов, а также уравнения движения пластин относительно этих силовых факторов.

Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную толстую пластину постоянной толщины $H = 2h$ и с размерами $a,\ b$ в плане. Введем обозначения: $E_1,\ E_2,\ E_3$ – модули упругости и G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига; $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ – коэффициенты Пуассона материала пластины.

Введем декартовую систему координат $x_1,\ \ x_2$ и z . Ось OZ направим вертикально вниз. Пусть к нижней и верхней лицевым поверхностям пластины $z = h$ и $z = -h$ приложены распределенные поверхностные нормальные и касательные нагрузки. Нормальные нагрузки в направлении оси OZ обозначим $q_3^{(+)},\ q_3^{(-)}$, касательные нагрузки в направлении $ox_1,\ ox_2$ – $q_k^{(+)},\ q_k^{(-)},\ (k = 1,2)$.

Компоненты вектора перемещения определяются функциями трех пространственных координат и времени $u_1(x_1, x_2, z, t),\ u_2(x_1, x_2, z, t),\ u_3(x_1, x_2, z, t)$. Компоненты тензора деформации определятся по соотношениям Коши.

Отметим, что методика построения бимоментной теории пластин основана на соотношениях Коши, обобщенном законе Гука, трехмерных уравнениях теории упругости и граничных условиях на лицевых поверхностях, а также на разложении перемещений в бесконечный ряд Маклорена.

Бимоментная теория пластин [6 – 11] описывается двумя независимыми задачами, каждая из которых формулируется на основе девяти уравнений с соответствующими краевыми условиями. Первая задача описывает симметричную задачу о продольных колебаниях с учетом поперечного обжатия, а вторая – асимметричную задачу изгиба с учетом поперечного сдвига материала толстой пластины.

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

В статье рассмотрим изгибно-сдвиговые колебания толстой пластины на упругом основании. Задачу изгибных колебаний толстой пластины рассмотрим в рамках бимоментной теории толстых пластин [6 – 11].

Бимоментная теория толстых пластин. Задача изгибных колебаний толстой пластины в рамках бимоментной теории описывается уравнениями для моментов, перерезывающих сил и бимоментов, а также тремя уравнениями относительно обобщенных перемещений лицевых поверхностей пластины. Силы, моменты и бимоменты определяются относительно девяти неизвестных функций, определяемых следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\widetilde{W}=\frac{u_3^{(+)}+u_3^{(-)}}{2},\quad \widetilde{r}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u_3dz,\quad \widetilde{\gamma}=\frac{1}{2h^3}\int_{-h}^{h}u_3z^2dz,\\ \widetilde{u}_k=\frac{u_k^{(+)}-u_k^{(-)}}{2},\quad \widetilde{\psi}_k=\frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}u_kzdz,\quad \widetilde{\beta}_k=\frac{1}{2h^4}\int_{-h}^{h}u_kz^3dz,\quad (k=1,2).\end{gathered}\tag{1}$$

Уравнения движения в моментах и силах имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}-Q_{13}+H\widetilde{q}_1=\frac{H^2}{2}\rho\ddot{\widetilde{\psi}}_1,\\ \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}-Q_{23}+H\widetilde{q}_2=\frac{H^2}{2}\rho\ddot{\widetilde{\psi}}_2,\end{gathered}\tag{2}$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_{23}}{\partial x_2}+2\widetilde{q}_3=\rho H\ddot{\widetilde{r}}\ .\tag{3}$$

Изгибающие и крутящие моменты определяются в виде:

$$\begin{gathered}M_{11}=\frac{H^2}{2}\left(E_{11}H\frac{\partial\widetilde{\psi}_1}{\partial x_1}+E_{12}H\frac{\partial\widetilde{\psi}_2}{\partial x_2}-E_{13}\frac{2(\widetilde{r}-\widetilde{W})}{H}\right),\\ M_{22}=\frac{H^2}{2}\left(E_{12}H\frac{\partial\widetilde{\psi}_1}{\partial x_1}+E_{22}H\frac{\partial\widetilde{\psi}_2}{\partial x_2}-E_{23}\frac{2(\widetilde{r}-\widetilde{W})}{H}\right),\\ M_{12}=M_{21}=G_{12}\frac{H^2}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{\psi}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\widetilde{\psi}_2}{\partial x_1}\right),\end{gathered}\tag{4}$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

где E_{11}, $E_{12},...,E_{33}$ – упругие константы, определяемые через коэффициенты. Перерезывающие силы определяются в виде:

$$Q_{13} = G_{13}(2\widetilde{u}_1 + H\frac{\partial\widetilde{r}}{\partial x_1}),\;\; Q_{23} = G_{23}(2\widetilde{u}_2 + H\frac{\partial\widetilde{r}}{\partial x_2})\,. \tag{5}$$

В уравнениях (2), (3) грузовые члены определяются по формулам:

$$\widetilde{q}_k = \frac{q_k^{(+)} + q_k^{(-)}}{2},\;(k=1{,}2),\quad \widetilde{q}_3 = \frac{q_3^{(+)} - q_3^{(-)}}{2}\,.$$

Бимоменты P_{11}, P_{22} P_{12}, порождаемые при изгибе и сдвиге пластины, определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \frac{H^2}{2}\left(E_{11}\frac{\partial\widetilde{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{12}\frac{\partial\widetilde{\beta}_2}{\partial x_2} - E_{13}\frac{2(3\widetilde{\gamma}-\widetilde{W})}{H}\right),\\
P_{22} &= \frac{H^2}{2}\left(E_{12}\frac{\partial\widetilde{\beta}_1}{\partial x_1} + E_{22}\frac{\partial\widetilde{\beta}_2}{\partial x_2} - E_{23}\frac{2(3\widetilde{\gamma}-\widetilde{W})}{H}\right),\\
P_{12} &= P_{21} = \frac{H^2}{2}G_{12}\left(\frac{\partial\widetilde{\beta}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\widetilde{\beta}_2}{\partial x_1}\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Интенсивности поперечных касательных и нормальных бимоментов $\widetilde{p}_{13}$, $\widetilde{p}_{23}$ и $\widetilde{p}_{33}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}_{k3} &= G_{k3}\left(\frac{2\widetilde{u}_k - 4\widetilde{\psi}_k}{H} + \frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial x_k}\right),\;\;(k=1{,}2),\\
\widetilde{p}_{33} &= E_{31}\frac{\partial\widetilde{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{32}\frac{\partial\widetilde{\psi}_2}{\partial x_2} - E_{33}\frac{2(\widetilde{r}-\widetilde{W})}{H}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Уравнения относительно бимоментов при изгибе и поперечном сдвиге получаются в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x_2} - 3\widetilde{p}_{13} + H\widetilde{q}_1 &= \frac{H^2}{2}\rho\ddot{\widetilde{\beta}}_1,\\
\frac{\partial P_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{22}}{\partial x_2} - 3\widetilde{p}_{23} + H\widetilde{q}_2 &= \frac{H^2}{2}\rho\ddot{\widetilde{\beta}}_2,
\end{aligned} \tag{8}$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$H\frac{\partial\widetilde{p}_{13}}{\partial x_1}+H\frac{\partial\widetilde{p}_{23}}{\partial x_2}-4\widetilde{p}_{33}+2\widetilde{q}_3=H\rho\ddot{\widetilde{\gamma}}. \qquad (9)$$

Уравнения (2), (3), (8) и (9) составляют совместную систему шести уравнений относительно девяти неизвестных функций: $\widetilde{\psi}_1$, $\widetilde{\psi}_2$, $\widetilde{\beta}_1$, $\widetilde{\beta}_1$, $\widetilde{u}_1$, $\widetilde{u}_2$, $\widetilde{r}$, $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{W}$.

В построенных шести уравнениях (2), (3), (8) и (9) содержится девять неизвестных функций, определяемых по формулам (1). Как видно, здесь не хватает еще трех уравнений. Для построения этих недостающих уравнений использован метод разложения перемещений в ряд Маклорена.

Для задачи изгибных колебаний эти уравнения запишутся в виде

$$\frac{\partial\widetilde{\sigma}_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\widetilde{\sigma}_{12}}{\partial x_2}+\frac{\widetilde{\sigma}_{13}^*}{H}=\rho\ddot{\widetilde{u}}_1,\qquad \frac{\partial\widetilde{\sigma}_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\widetilde{\sigma}_{22}}{\partial x_2}+\frac{\widetilde{\sigma}_{23}^*}{H}=\rho\ddot{\widetilde{u}}_2, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial\widetilde{q}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\widetilde{q}_2}{\partial x_2}+\frac{\widetilde{\sigma}_{33}^*}{H}=\rho\ddot{\widetilde{W}}. \qquad (11)$$

Здесь $\widetilde{\sigma}_{11},\widetilde{\sigma}_{12},\widetilde{\sigma}_{22}$ определяются из закона Гука с учетом условий на лицевых поверхностях:

$$\widetilde{\sigma}_{11}=E_{11}^*\frac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_1}+E_{12}^*\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_2}+\frac{E_{13}}{E_{33}}\widetilde{q}_3,\quad \widetilde{\sigma}_{22}=E_{12}^*\frac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_1}+E_{22}^*\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_2}+\frac{E_{23}}{E_{33}}\widetilde{q}_3,$$

$$\widetilde{\sigma}_{12}=G_{12}\left(\frac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_1}\right),$$

здесь $E_{11}^*=E_{11}-\dfrac{E_{13}}{E_{33}}E_{31}$, $\quad E_{22}^*=E_{22}-\dfrac{E_{23}}{E_{33}}E_{32}$, $\quad E_{12}^*=E_{21}-\dfrac{E_{23}}{E_{33}}E_{31}$.

Бимоменты $\widetilde{\sigma}_{31}^*$, $\widetilde{\sigma}_{32}^*$, $\widetilde{\sigma}_{33}^*$ определены в виде

$$\frac{\widetilde{\sigma}_{3k}^*}{H}=G_{k3}\left(\frac{210\left(33\widetilde{\beta}_k-9\widetilde{\psi}_k-4\widetilde{u}_k\right)}{H^2}-\frac{42}{H}\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{E_{31}}{E_{33}}\frac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_1}+\frac{E_{31}}{E_{33}}\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_2}-\frac{\widetilde{q}_3}{E_{33}}\right)\right)+$$

$$+\frac{42}{H}\widetilde{q}_k,\ \left(k=1,2\right),$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\frac{\tilde{\sigma}_{33}^*}{H} = E_{33}\frac{210\left(9\tilde{\gamma} - 2\tilde{W} - \tilde{r}\right)}{H^2} + \frac{30}{H}\left(\tilde{q}_3 - E_{31}\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} - E_{32}\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2}\right) +$$
$$+ E_{31}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\tilde{q}_1}{G_{13}} - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_1}\right) + E_{32}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\tilde{q}_2}{G_{23}} - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_2}\right).$$

Система уравнений (2), (3), (8) – (11) составляет совместную систему относительно девяти неизвестных функций $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\psi}_2$, $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{r}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{W}$.

Отметим, что при построении уравнения движения (10) удержано по восемь членов ряда Маклорена и это уравнение построено с точностью до шестого порядка относительно параметра пластины $H/10a$, уравнения (11) построены с точностью до четвертого порядка относительно малого параметра пластины $H/10a$ при удержании по шести членов ряда Маклорена.

Пример. В качестве применения бимоментной теории пластин к прикладным задачам рассмотрены динамические задачи изгиба и колебаний пластины на упругом основании под воздействием внешней динамической нагрузки в виде функции Хевисайда, приложенной соответственно к лицевой поверхности $z = -h$ в виде

$$q_3^{(-)} = \begin{cases} 0, & \text{при } t \le 0; \\ -q_0, & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

где q_0 – параметр нагрузки.

При решении поставленной задачи о колебаниях пластин на упругом основании предполагаем, что обобщенные перемещения $\bar{u}_1$, $\bar{u}_1$, $\bar{W}$ малы по сравнению с обобщенными перемещениями $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_1$, $\tilde{W}$. Это допущение обеспечивает независимость второй задачи изгиба и колебаний пластин бимоментной теории от первой задачи, описывающей растяжение – сжатие с учетом поперечного обжатия пластины, что облегчает построение решения поставленной задачи. Построены следующие выражения для контактных сил, которые появляются между пластиной и упругим основанием:

$$\tilde{q}_1 = \frac{k_1}{2}\tilde{u}_1 + q_1^{(-)},\ \ \tilde{q}_2 = \frac{k_2}{2}\tilde{u}_2 + \frac{1}{2}q_2^{(-)},\ \ \tilde{q}_3 = \frac{k_3}{2}\tilde{W} - \frac{1}{2}q_3^{(-)},$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

где k_1, k_2, k_3 – коэффициенты постели упругого основания.

Считается, что край пластины $x_2 = 0$ жестко защемлен. Остальные края пластины свободны от опор. На защемленном крае пластины перемещения равны нулю:

$$\begin{aligned} &\tilde{\psi}_1 = 0, \quad \tilde{\beta}_1 = 0, \quad \tilde{\psi}_2 = 0, \quad \tilde{\beta}_2 = 0, \\ &\tilde{u}_1 = 0, \quad \tilde{u}_2 = 0, \quad \tilde{r} = 0, \quad \tilde{\gamma} = 0, \quad \tilde{W} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

А на свободных краях пластины $x_1 = 0$, $x_1 = a$, $x_2 = b$ силы, моменты и бимоменты равны нулю.

$$\begin{aligned} &M_{11} = 0, \; M_{12} = 0, \; P_{11} = 0, \; P_{12} = 0, \\ &Q_{13} = 0, \; \tilde{p}_{13} = 0, \; \tilde{\sigma}_{11} = 0, \; \tilde{\sigma}_{12} = 0, \; \tilde{\sigma}^*_{11} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} &M_{22} = 0, \; M_{12} = 0, \; P_{22} = 0, \; P_{12} = 0, \\ &Q_{23} = 0, \; \tilde{p}_{23} = 0, \; \tilde{\sigma}_{22} = 0, \; \tilde{\sigma}_{12} = 0, \; \tilde{\sigma}^*_{22} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Величины $\tilde{\sigma}_{11}, \tilde{\sigma}_{12}, \tilde{\sigma}_{22}$ определяются из закона Гука с учетом условий на лицевых поверхностях:

$$\begin{aligned} &\tilde{\sigma}_{11} = E^*_{11}\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + E^*_{12}\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} + \frac{E_{13}}{E_{33}}\tilde{q}_3, \\ &\tilde{\sigma}_{22} = E^*_{12}\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + E^*_{22}\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} + \frac{E_{23}}{E_{33}}\tilde{q}_3, \\ &\tilde{\sigma}_{12} = G_{12}\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_1}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

здесь $E^*_{11} = E_{11} - \dfrac{E_{13}}{E_{33}}E_{31}, \quad E^*_{22} = E_{22} - \dfrac{E_{23}}{E_{33}}E_{32}, \quad E^*_{12} = E_{21} - \dfrac{E_{23}}{E_{33}}E_{31}.$

Поставленная задача описывается уравнениями движения бимоментной теории пластин (2), (3), (8) – (11) и граничными условиями (12) – (14) и решена методом конечных разностей. Максимальные напряжения пластины определены выражениями (15).

Анализ численных результатов. Выполнены расчеты для изотропных и ортотропных квадратных пластин. Получены безразмерные численные результаты расчета перемещений и напряжений для квадратной

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

ортотропной пластины CBAM 15:1 с упругими характеристиками $E_1 = 4{,}6 * E_0$, $E_2 = 1{,}6 * E_0$, $E_1 = 1{,}12 * E_0$, $G_{12} = 0{,}56 * E_0$, $G_{13} = 0{,}43 * E_0$, $G_{23} = 0{,}33 * E_0$, $\nu_{21} = 0{,}27, \nu_{31} = 0{,}07, \nu_{23} = 0.3$, здесь $E_0 = 10^4$ $МПа$.

Безразмерные значения коэффициентов взаимодействия задаются в следующем виде: $k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ \frac{k_3 H}{E_0} = 0.03$.

Численные результаты определены для ортотропных пластин, построенных по бимоментной теории и по теории Тимошенко. Ниже приведены численные результаты динамического расчета толстой пластины на упругом основании с одним свободным $(y_1 = b)$ и остальными защемленными краями $(x_1 = 0,\ \ x_1 = a,\ \ y_1 = 0)$.

Приведен анализ численных результатов задачи по колебаниям консольной пластины с размерами в плане $a = b = 10H$ на её лицевой поверхности $z = +h,\ z = -h$.

Расчеты показали, что напряжение σ_{11} ортотропной пластины на упругом основании в точке $x_1 = 0,\ y_1 = b$ достигает максимального значения: по бимоментной теории оно равно $\sigma_{11} = -62.696 q_0$, а по теории Тимошенко – $\sigma_{11} = -31.261 q_0$. Здесь ошибка по теории Тимошенко составляет примерно 100%. Напряжения σ_{22} ортотропной пластины в точке $x_1 = a/2,\ y_1 = 0$ достигают максимума по бимоментной теории – $\sigma_{22} = -21.081 q_0$, а по теории Тимошенко – $\sigma_{22} = -17.582 q_0$. Таким образом, разница составляет примерно 20%. Максимальное значение изгибающего момента M_{11} ортотропной пластины в точке $x_1 = 0,\ y_1 = b/2$ достигает максимума и его величина составляет по бимоментной теории $M_{11} = -6.597 E_1 \frac{H^2}{2}$, а по теории Тимошенко $M_{11} = -5.210 E_1 \frac{H^2}{2}$. Здесь ошибка по теории Тимошенко составляет больше 27%.

Отметим, что максимальные безразмерные значения напряжений $\sigma_{22}^{(+)}, \sigma_{22}^{(-)}$ точек на лицевых поверхностях ортотропной пластины без учета упругого основания достигаются в середине защемленного края пластины $(x_1 = a/2,\ x_2 = 0)$: $\sigma_{22}^{(+)} = -86.681 q_0$ и $\sigma_{22}^{(-)} = 90.919 q_0$.

Расчеты выполнены в среде Borland Delphi 7.0.

Выводы. Отметим, что все выполненные расчеты относятся к толстым пластинам и пластинам средней толщины. Полученная разница в численных результатах является эффектом учета бимоментов в поперечных сечениях пластины, где проявляются нелинейные законы распределения перемещений.

Предлагаемую бимоментную теорию изгиба и колебаний пластин легко можно обобщить для оболочек.

Отметим, что преимущество бимоментной теории среди существующих теорий заключается в высокой точности и в хорошей применимости при решениях различных практических задач для оценки напряженнодеформированного состояния толстых пластин. С использованием бимоментной теории пластин развивается методики построения континуальные модели и методики расчета на сейсмостокойсть многоэтажных зданий и пластинчатых сооружений.

Список литературы:

1. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин / *С.А. Амбарцумян.* – М. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. – 360 с.

2. *Муштари Х.М.* Нелинейная теория оболочек / *Х.М. Муштари.* – М.: Наука, 1990. – 223 с.

3. *Горбачев В.И.* Об одном подходе к построению теории пластин / *В.И. Горбачев.* – М.: Изд. МГУ, Упругость и неупругость, 2006. – С. 301-310.

4. *Ахмедов А.Б.* Действие сосредоточенных сил на упругую плиту / *А.Б. Ахмедов* // Узбекский журнал Проблемы механики. – Ташкент. – 2006. – № 4. – С. 5-9.

5. *Си-Хунг Чанг* Трехмерные решения упругости прямоугольных ортотропных пластин / *Чанг Си-Хунг, Тарн Цзянн-Куо* // Журнал эластичности. – 2012. – Том. 108. – № 1. – С. 49-66.

6. *Усаров М.К.* Задача изгиба для толстой ортотропной пластины в трехмерной постановке. – Санкт-Петербург / *М.К. Усаров* // Инженерно-строительный журнал. – 2011.– № 4 (22). – С. 40-47.

7. *Усаров М.К.* Изгиб ортотропных пластин с учетом бимоментов. – Санкт-Петербург / *М.К. Усаров* // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – № 1 (53).– С. 80-90.

8. *Makhamatali K. Usarov* Dynamic Design of Thick Orthotropic Cantilever Plates with Consideration of Bimoments / *Usarov Makhamatali K.* // World Journal of Mechanics. – 2016. –No. 6. – P. 341-356.

9. *Usarov D.* Simulation of free vibrations of a thick plate without simplifying hypotheses / *D. Usarov, K. Turajonov, S. Khamidov* // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – 1425. – pp. 012115. DOI:10.1088/1742-6596/1425/1/012115. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1425/1/012115.

10. *Mirsaidov M,* Bimoment theory construction to assess the stress state of thick orthotropic plates / *M. Mirsaidov, M. Usarov* // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. – 2020. – 614 (1). – 012090, https://doi.org/10.1088/1755-1315/614/1/012090.

11. *Усаров М.К.* К теории изгиба и колебаний трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем / *М.К. Усаров, А. Салохиддинов, Д.М. Усаров, И. Хазраткулов, Н. Дремова* // ИОП конф. Серия: Материаловедение и инженерия. 2020. – 869 – 052037. https://doi.org/10.1088/1757-899X/869/5/052037.

References:

1. Ambartsumyan, S.A. (1987), *Theory of anisotropic plates*, Moskow, Nauka. ch. ed. Phys.-Math. lit., 360 p.
2. Mushtari, Kh.M. (1990), *Nonlinear theory of shells*, Moskow, Nauka, 223 p.
3. Gorbachev, V.I. (2006), *On one approach to the construction of the theory of plates*, Moskow, Ed. Moscow State University, Elasticity and Inelasticity, pp. 301-310.
4. Akhmedov, A.B. (2006), The action of concentrated forces on an elastic plate // *Uzbek Journal of Problems of Mechanics*, Tashkent, No. 4, P. 5-9.
5. *Hsi-Hung, Chang, Jiann-Quo, Tarn*. (2012), Three-Dimensional Elasticity Solutions for Rectangular Orthotropic Plates, *Journal of Elasticity,* Vol. 108, No. 1, pp. 49-66.
6. Usarov, M.K. (2011), Bending problem for a thick orthotropic plate in 3D. Saint-Petersburg // *Civil Engineering Journal*, No. 4 (22), pp.40-47.
7. Usarov, M.K. (2015), Bending of orthotropic plates with allowance for bimoments. St. Petersburg // *Civil Engineering Journal*, No. 1 (53), pp. 80-90.
8. Makhamatali K., Usarov (2016), Dynamic Design of Thick Orthotropic Cantilever Plates with Consideration of Bimoments, *World Journal of Mechanics*, Vol. 6, pp. 341-356.
9. Usarov, D., Turajonov, K., Khamidov, S. (2019), Simulation of free vibrations of a thick plate without simplifying hypotheses, *Journal of Physics: Conference Series*. 1425, pp. 012115. DOI:10.1088/1742-6596/1425/1/012115. https://iopscience.iop.org/article/ 10.1088/1742-6596/1425/1/012115.
10. Mirsaidov, M., Usarov, M. (2020), Bimoment theory construction to assess the stress state of thick orthotropic plates, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 614 (1), 012090, https://doi.org/10.1088/1755-1315/614/1/012090.
11. Usarov, M.K., Salokhiddinov, A., Usarov, D. M., Khazratkulov, I. and Dremova, N. (2020), To the theory of bending and oscillations of three-layered plates with a compressible filler, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering,* 869, 052037. https://doi.org/10.1088/1757-899X/869/5/052037 (Scopus database).

Статтю представив д.т.н., проф. Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" С.Ю. Леонов.

Поступила (received) 06.12.2022

Makhmatali Usarov, Dr. Phys.-Math. Sci, Professor
"Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures"
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Str. Durmon yuli 33, Tashkent, Uzbekistan,100125,
Тел: -998 (90) 374-38-78. E-mail: umakhamatali@mail.ru
ORCID ID 0000-0001-7848-3696

Shukhrat Askarkhodjaev, junior researcher,
"Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures"
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Str. Durmon yuli 33, Tashkent, Uzbekistan,100125,
Тел: +998 (90) 130-30-90. E-mail: shuhrat1608@mail.ru

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Kurbanbaev Makhsut, junior researcher,
"Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures"
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Str. Durmon yuli 33, Tashkent, Uzbekistan,100125,
Тел: +998 (97) 897-47-97. E-mail: kurbanbayev93@bk.ru

Shamsiev Dilshod, junior researcher,
"Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures"
Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,
Str. Durmon yuli 33, Tashkent, Uzbekistan,100125,
Тел: +998 (93) 337-38-76. E-mail: dilshodshamsiyev.1993@mail.ru

УДК 539.3

До розрахунку ортотропних пластин з урахуванням бімоментів / М.К. Усаров, Ш.И. Аскарходжаєв, Д.К. Шамсієв, М.Ш. Курбанбаєв // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2022. – № 1 – 2 (7 – 8). – С. 40 – 51.

Робота присвячена розробці бімоментної теорії та методу розрахунку товстих пластин у рамках тривимірної теорії пружності. Наводяться основні співвідношення та рівняння руху пластини, побудовані щодо сил, моментів та бімоментів, що виникають через нелінійність закону розподілу переміщень та напруг за її товщиною. Як приклад розрахунку розглянуті вигин та коливання ізотропних та ортотропних пластин. Отримане рішення показало ефективність та точність запропонованої бімоментної теорії при оцінці напружено деформованого стану товстих пластин. Бібліогр.: 11 назв.

Ключові слова: товста ортотропна пластина; тривимірна теорія пружності; бімоментна теорія; вигин та коливання; напружено-деформований стан.

УДК 539.3

К расчету ортотропных пластин с учетом бимоментов / М.К. Усаров, Ш.И. Аскарходжаев, Д.К. Шамсиев, М.Ш. Курбанбаев // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2022. – № 1 – 2 (7 – 8). – С. 40 – 51.

Работа посвящена разработке бимоментной теории и метода расчета толстых пластин в рамках трехмерной теории упругости. Приводятся основные соотношения и уравнения движения пластины, построенные относительно сил, моментов и бимоментов, возникающих из-за нелинейности закона распределения перемещений и напряжений по её толщине. В качестве примера расчета рассмотрены изгиб и колебания изотропных и ортотропных пластин. Полученное решение показало эффективность и точность предложенной бимоментной теории при оценке напряженно-деформированного состояния толстых пластин. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: толстая ортотропная пластина трехмерная теория упругости; бимоментная теория; изгиб и колебания; напряженно-деформированное состояние.

UDK 539.3

To the calculation of orthotropic plates taking into account bimoments / M.K. Usarov, Sh.I. Askarkhodjaev, D.K. Shamsiev, M.SH. Kurbanbaev // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2022. – № 1 – 2 (7 – 8). – P. 40 – 51.

The work is devoted to the development of the bimoment theory and the method for calculating thick plates in the framework of the three-dimensional theory of elasticity. The basic relations and equations of motion of the plate are given, constructed with respect to forces, moments and bimoments, arising from the nonlinearity of the law of distribution of displacements and stresses over its thickness. Bending and vibrations of isotropic and orthotropic plates are considered as an example of calculation. The resulting solution showed the efficiency and accuracy of the proposed bimoment theory in assessing the stress-strain state of thick plates. Refs.: 11 titles.

Keywords: thick orthotropic plate; three-dimensional theory of elasticity; bi-moment theory; bending and vibrations; stress-strain state.