

УДК 004.48: 004.94

DOI: 10.20998/2411-0558.2024.01.11

А. Д. ДАШКЕВИЧ, канд. техн. наук, доц., Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", Харків

ПІДХІД ДО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТОЧКОВИХ МНОЖИН НА ЦІЛОЧИСЕЛЬНИХ РЕГУЛЯРНИХ СІТКАХ

В роботі продемонстровано узагальнений підхід до моделювання взаємодії точок та точкових множин на цілочисельних регулярних сітках в метричних просторах. Процес моделювання базується на визначенні просторових відносин в парах «Точка-Множина» та «Множина-Множина», що дозволяє визначати просторову взаємодію між довільними геометричними об'єктами, що задані як сіткові геометричні моделі (СГМ), які являють точкові множини на регулярних сітках, в роботі розроблені узагальнені схеми просторової взаємодії. В результаті роботи розроблено програмне забезпечення для проведення комп'ютерних експериментів із моделювання взаємодії в метричних просторах довільної розмірності та візуалізації їх результатів. Розроблений підхід протестовано на наборах даних різної розмірності.. Іл.: 7.; Бібліогр.: 13 назв.

Ключевые слова: моделювання просторової взаємодії, точкова множина, цілочисельна регулярна сітка, сіткова геометрична модель.

Постановка проблеми. В сучасному світі більшість даних, що отримуються із використанням спеціалізованих технічних засобів, таких як відео-, аудіо- та інші сенсори, мають дискретний характер і являють відображення неперервних процесів оточуючого середовища на метричні простори із заданою розмірністю. Дискретизація точкових множин є однією із базових операцій під час отримання даних в сучасних сенсорних системах, наприклад, одновимірні кардіограми та звукові файли, двовимірні цифрові зображення, тривимірні воксельні моделі, що отримані із використанням методів фотограметрії та лазерного сканування. При цьому більшість дискретизованих даних можуть бути природнім чином представлені як точкові масиви на регулярних цілочисельних сітках відповідної розмірності. Аналогічні представлення точкових множин виникають під час чисельного моделювання різних процесів для представлення геометричних об'єктів та фізичних полів різного характеру. Постійне зростання кількості отримуваних даних та необхідність все більш точних симуляцій призводять до необхідності розробки спеціалізованих геометричних структур даних, математичних теорій та відповідного комп'ютерного інструментарію для зберігання та

ефективної обробки точкових множин на регулярних сітках різної розмірності із великою кількістю точок в таких множинах. Задачі обробки точкових даних на площині, у тривимірному або багатовимірних просторах часто можуть бути розв'язані на основі визначення просторових відносин між об'єктами даних в множині.

Аналіз останніх досліджень. Однією із важливих просторових характеристик точкової множини, на основі якої можна вирішувати великий пласт практичних задач, є близькість точок у просторі. Для знаходження точок, що є найближчими у метричному просторі довільної розмірності M^d є два основних підходи: метод повного перебору із часовою складністю $O(n^2)$ та підхід на основі впорядкування точкової множини із використанням спеціальних просторових структур даних, найчастіше використовуються kd-дерева [1, 2], r-дерева [3], BSP-дерева [4] та просторові хеш-таблиці [5 – 7], а також відповідні алгоритми з обробки просторових структур [8, 9]. Інші підходи базуються на комбінуванні використання просторових структур та алгоритмів для оптимізації обчислювальної складності, так, в роботах автора [10, 11] запропоновано узагальнені підходи до просторової обробки точкових множин на основі дискретизованих представлень точкових множин на регулярних сітках для підвищення обчислювальної ефективності розв'язання практичних задач. Існуючі підходи до розв'язання практичних задач із дискретизованими точковими множинами потребують подальших досліджень для створення уніфікованих схем застосування при обробці великих та багатовимірних даних.

Мета роботи. Розробка узагальненого підходу для створення обчислювально ефективних алгоритмів моделювання взаємодії об'єктів, що представлені як точки у метричних просторах довільної розмірності.

Основна частина. Визначимо взаємодію двох геометричних об'єктів P_1 та P_2 , які задано множинами точок в метричному просторі M^d на основі виразу:

$$\exists p \in P_1, \exists q \in P_2, p \in B_r(q), \quad (1)$$

що може бути переписано як:

$$\rho(p, q) \leq R, R \geq 0,$$

де p, q – деякі точки, $\rho(\cdot)$ – метрика на просторі M^d , $B_r(q)$ – окіл заданого радіусу навколо точки q , R – деяка константа.

В залежності від типів об'єктів, що складають множини P_1 та P_2 можна виділити такі узагальнені види взаємодії:

- взаємодія "Точка-Точка":

$$p = P_1, q = P_2;$$

- взаємодія "Точка-Об'єкт":

$$p = P_1, \exists q \in P_2;$$

- взаємодія "Об'єкт-Об'єкт" описується загальним виразом (1).

Запропонуємо наступну структуру взаємодії двох геометричних об'єктів:

Визначення 1. Карта взаємодії – двовимірна сіткова геометрична модель (СГМ) [11] $M(P_1, P_2) = \langle P_1 \times P_2 \rangle$, яка являє Декартів добуток об'єктів $p_i \in P_1, p_j \in P_2$ – множину усіх пар взаємодій об'єктів множин P_1 та P_2 , значення $m_{ij} \in M$ характеризують кількість взаємодій $m_{ij} \in [0, \infty)$, або факт наявності взаємодії $m_{ij} \in \{0, 1\}$ (двійкові значення).

З урахуванням визначення 1 та виразу (1) умова взаємодії двох об'єктів може бути переписана як:

$$m_{ij} > 0.$$

Так як в загальному випадку взаємодія об'єктів відбувається не за схемою "Усі-з-усіма", то представлення карти взаємодії являтиме сильно розріджені матриці і для зменшення витрат по пам'яті більш доцільним буде представляти взаємодію об'єктів через спеціальні спискові структури. Визначимо спискову структуру як конкатенацію пар відповідностей об'єктів:

$$L = \langle O_1, O_2 \rangle \subseteq \langle O_1, O_2 \rangle, \quad (2)$$

де O_1 та O_2 – відповідні множини заданих об'єктів, наприклад, спискова структура взаємодії «Точка-Об'єкт» згідно виразу (2):

$$L = \langle p, P_2 \rangle.$$

Для зручності побудови та використання спискових структур в якості об'єктів O_1 та O_2 можна використовувати порядкові номери об'єктів замість використання об'єктів напряму. Введемо поняття *індексного списку* множини:

Визначення 2. Індексний список I_P множини P – множина порядкових номерів (індексів) об'єктів множини P :

$$I_P = Enum(P) = \bigcup_i i, i = 1, \dots, |P|,$$

де $Enum(P)$ – функція, яка повертає порядкові номери точок множини P .

На основі визначення 2 карта взаємодії може бути представлена як Декартів добуток пар взаємодії об'єктів множин, що задані через індекси:

$$M(P_1, P_2) = I_{P_1} \times I_{P_2}.$$

Таким чином спискова структура відповідності комірок СГМ точкам вхідної множини може бути представлена як:

$$L(M, I_P) = \langle M, I_P \rangle.$$

Карти та списки взаємодії є структурами, що можуть бути взаємно-однозначно перетворені одна у іншу:

$$L \leftrightarrow M.$$

Дві точкові множини, які задають довільні геометричні об'єкти завжди можуть бути зв'язані через індекси комірок СГМ, на яких розташовані дані множини. Аналогічним чином можна будувати довільну кількість проміжних спискових структур для побудови взаємозв'язків між різними об'єктами.

Сформулюємо узагальнену схему методу просторової обробки точкових множин. Для цього визначимо основні операції та процеси:

- дискретизація точок множини $f_D: P \rightarrow P_D$;
- узагальнені перетворення просторів $f: M^{d_1} \rightarrow M^{d_2}$;
- заповнення СГМ $f_M(P_D): p_i \in P_D \rightarrow m_{ij} \in M, m_{ij} = m_{ij} + 1$;
- операції індексації простору:
 - індексація комірок СГМ $h: M \rightarrow H$;

- індексація точок дискретизованої множини $h : P_D \rightarrow H_P, H_P \subseteq H$;
- обернення хешів – зворотнє перетворення індексу комірки у дискретизовані координати точки $\bar{h} : H_P \rightarrow P_D, H \rightarrow M$;
- побудова структури взаємодії (карти або списку);
- операція взяття елемента структури за індексом $m = M_{ij}, l = L_h$.

На основі базових операцій визначимо такі базові схеми просторової обробки для взаємодії "Точка-Множина":

- визначення належності точки до множини (рис. 1);
- визначення найближчих сусідів точки (рис. 2).

Схему взаємодії "Множина-Множина" через карту взаємодії наведено на рис. 3, а схему взаємодії "Множина-Множина" через списки взаємодії – на рис. 4. Схему взаємодії "Множини-Множини" наведено на рис. 5. В деяких задачах обробки взаємодії "Множина-Множина" відсутня необхідність індексації всіх комірок СГМ, тому розроблені схеми із індексацією виключно точкових множин:

- із побудовою списків взаємодії на основі окремих хеш-таблиць для кожної множини (рис. 6);
- із побудовою списків взаємодії на основі одної хеш-таблиці для обраної множини (рис. 7).

Для побудови структур взаємодії багатьох множин найбільш доцільний варіант з точки зору обчислювальної складності по часу на основі одночасної індексації точкових множин і комірок СГМ.

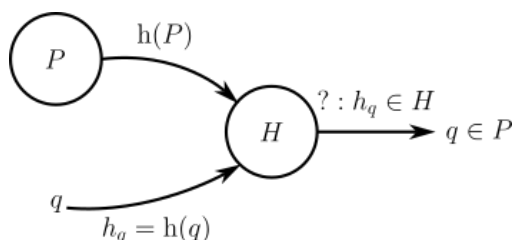


Рис. 1. Схема визначення належності точки до множини

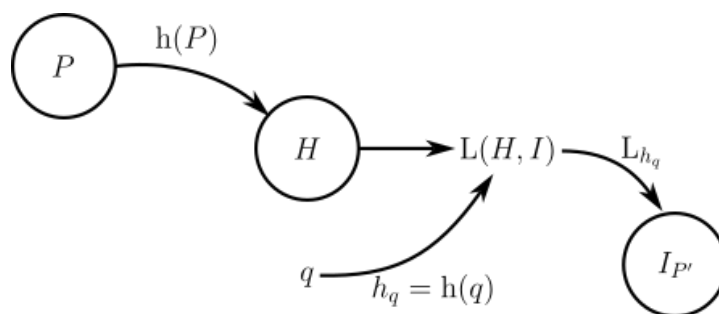


Рис. .2. Схема визначення найближчих сусідів точки

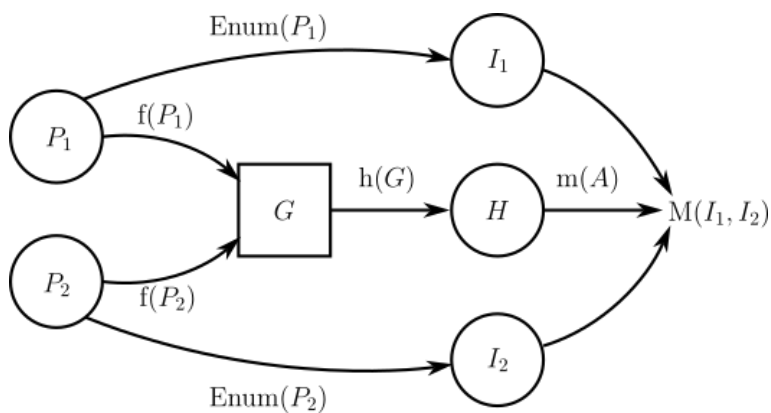


Рис. 3. Схема визначення взаємодії двох множин через карту взаємодії

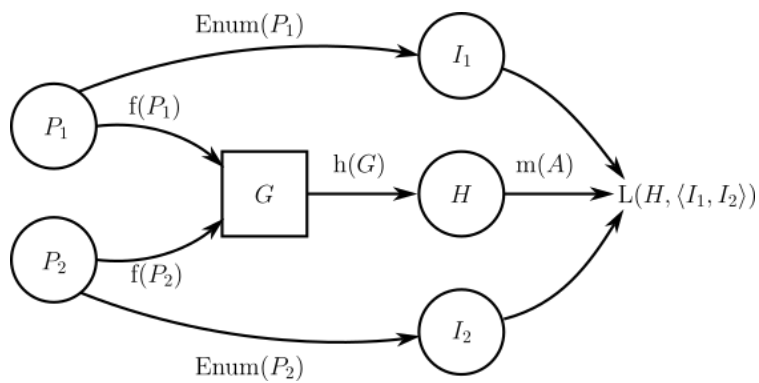


Рис. 4. Схема визначення взаємодії двох множин через список взаємодії

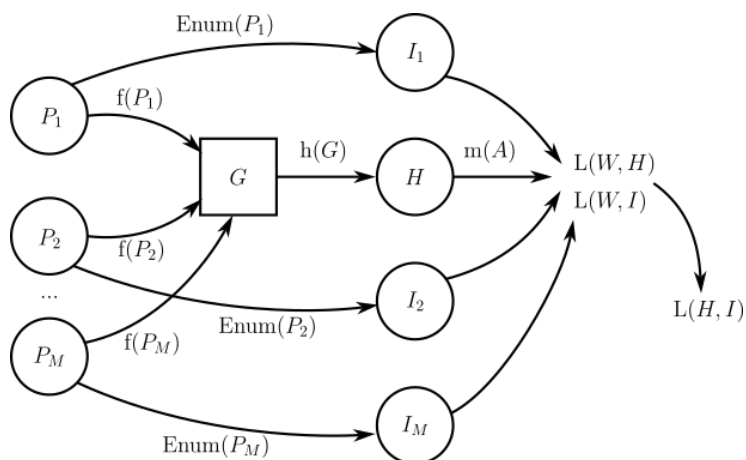


Рис. 5. Схема визначення взаємодії багатьох множин через ланцюги списків взаємодії

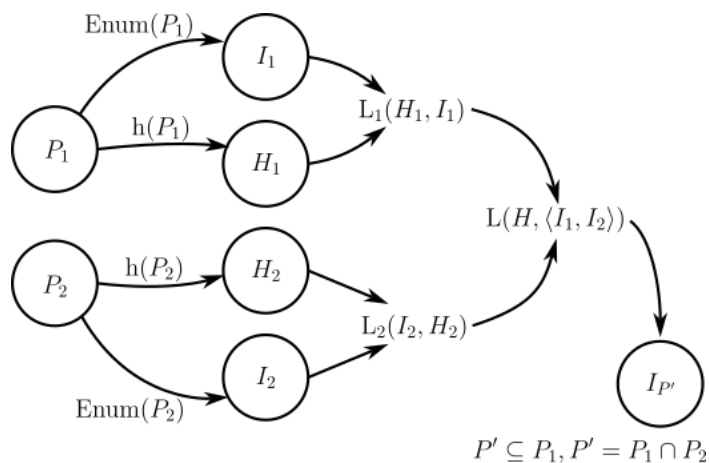


Рис. 6. Схема просторової обробки на основі побудови двох хеш-таблиць

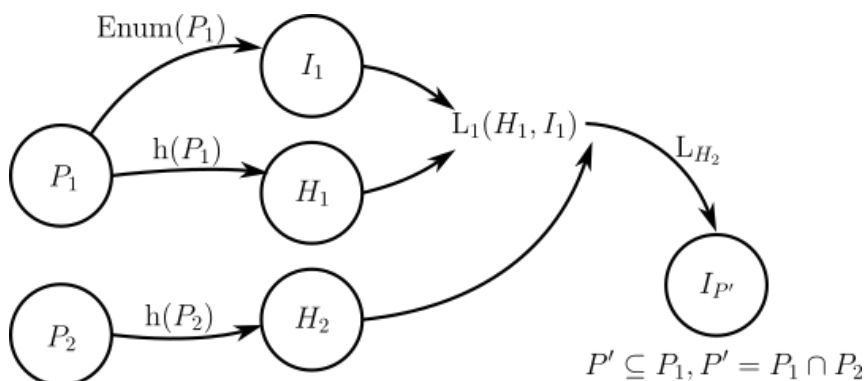


Рис. 7. Схема просторової обробки на основі побудови хеш-таблиці для однієї множини

Продемонструємо застосування підходу на основі схеми на рис. 7 до задачі визначення точок-перетинів відрізків [11] та визначимо час на пошук таких точок. На рис. 8 наведено приклади згенерованих множин відрізків та знайдених під час проведених експериментів точок перетину. На рис. 9 наведено залежність часу розв'язання задачі при різних значеннях кількості вхідних відрізків, на рис. 10 наведено час виконання схеми для різних розмірів сітки при фіксованій кількості відрізків. Результати показують, що кількість обчислень зростає лінійно як від кількості комірок СГМ, так і від кількості об'єктів у експериментах при фіксованій кількості комірок.

Висновки і перспективи подальших досліджень. В результаті роботи розроблено узагальнений підхід до створення ефективних з точки зору часу алгоритмів моделювання взаємодії об'єктів, що представлені як точки у метричних просторах довільної розмірності, на основі підходу запропоновані схеми до розв'язання практичних задач обробки великих даних.

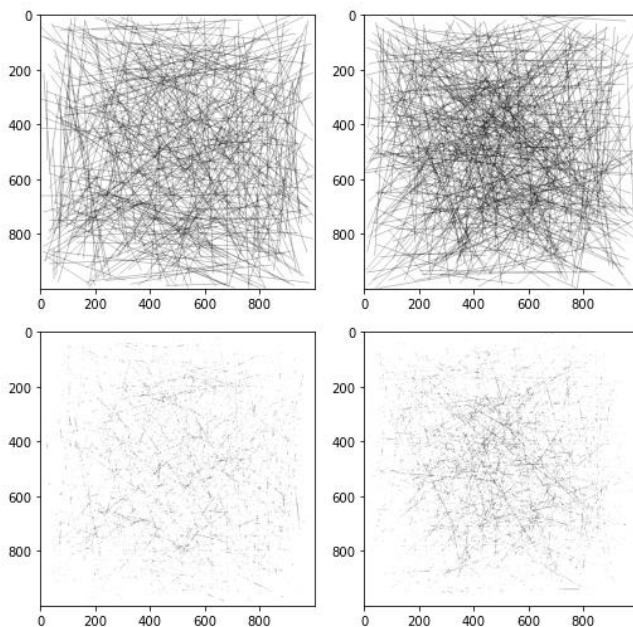


Рис. 8. Приклади згенерованих множин відрізків (зверху) та знайдені точки їх перетину (знизу)

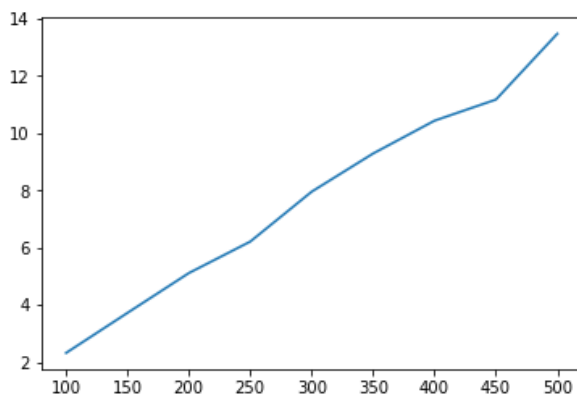


Рис. 9. Залежність часу розв'язання задачі від кількості відрізків при фіксованому розмірі СГМ

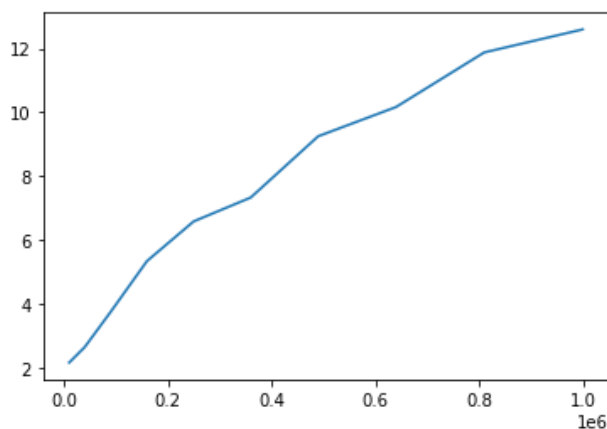


Рис. 10. Залежність часу розв'язання задачі від кількості комірок СГМ

Результатом виконання роботи є створення обчислювального інструментарію в вигляді програмних бібліотек для мови Python, які було протестовано при проведенні комп'ютерних експериментів із розв'язання задач обчислювальної геометрії.

Список літератури:

1. Bentley J.L. Multidimensional Divide and Conquer / J.L. Bentley // *Communications of the ACM*, 1980. -- Vol. 23. -- Is. 4. -- Pp. 214-229.
2. Zheng W. Data management method for building internet of things based on blockchain sharding and dag / W. Zheng, X. Wang, Z. Xie, [et al.] // *Internet of Things and Cyber-Physical Systems*. — 2024. — Vol. 4. — P. 217–234.
3. Guttman A. R-Trees: A Dynamic Index Structure for Spatial Searching / A. Guttman // *Proc. ACM SIGMOD International Conference on Management of Data*, 1984. -- Pp. 47-57.
4. de Berg M. *Computational Geometry: Algorithms and Applications* / M. de Berg // Springer Science & Business Media, 2008. -- P. 259.
5. Winter C. Fast indexing strategies for robust image hashes / C. Winter, M. Steinebach, Y. Yannikos // *Digital Investigation*. -- 2014. -- Vol. 11. — P. 27-35.
6. Majhi M. Random projection and hashing based privacy preserving for image retrieval paradigm using invariant and clustered feature / M. Majhi, A. K. Mallick // *Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences*. — 2022. — Vol. 34, No. 9. — P. 6829–6846.
7. Wan M. A new weakly supervised discrete discriminant hashing for robust data representation / M. Wan, X. Chen, C. Zhao, [et al.] // *Information Sciences*. — 2022. — Vol. 611. — P. 335–348.
8. Muja M. Scalable Nearest Neighbor Algorithms for High Dimensional Data / M. Muja, D.G. Lowe // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2014. -- Vol. 36. -- Pp. 2227-2240.

9. Klingensmith M. Chisel: real time large scale 3d reconstruction onboard a mobile device using spatially hashed signed distance fields / M. Klingensmith, I. Dryanovski, S. Srinivasa, J. Xiao. — Robotics: Science and Systems Foundation, 2015. — ISBN 978-0-9923747-1-6.
10. Дашкевич А.О. Обчислювальний підхід до розв'язання задач просторової обробки точкових множин на двовимірних регулярних сітках / А.О. Дашкевич // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2021. – № 2 (6). – С. 37-43.
11. Дашкевич А.О. Узагальнений підхід до задач представлення і обробки сіткових геометричних моделей / А.О. Дашкевич // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Вид-во МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2023. – Вип. 25. – С. 102-109.

References:

1. Bentley, J.L., (1980). Multidimensional divide-and-conquer. *Commun. ACM* 23, 214–229. <https://doi.org/10.1145/358841.358850>
2. Zheng, W., Wang, X., Xie, Z., Li, Y., Ye, X., Wang, J., Xiong, X., (2024). Data management method for building internet of things based on blockchain sharding and DAG. *Internet of Things and Cyber-Physical Systems* 4, 217–234. <https://doi.org/10.1016/j.iotcps.2024.01.001>
3. Guttman, A., (1984). R-trees: a dynamic index structure for spatial searching, in: *Proceedings of the 1984 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data, SIGMOD '84*. Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, pp. 47–57. <https://doi.org/10.1145/602259.602266>
4. *Computational geometry: Algorithms and applications*: By Mark de Berg, Marc van Kreveld, Mark Overmars and Otfried Schwarzkopf. Springer, Berlin. (1997). 365 pages. 1998. . *Computers & Mathematics with Applications* 36, 139. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(98\)90095-5](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(98)90095-5)
5. Winter, C., Steinebach, M., Yannikos, Y., (2014). Fast indexing strategies for robust image hashes. *Digital Investigation* 11, S27–S35. <https://doi.org/10.1016/j.diin.2014.03.004>
6. Majhi, M., Mallick, A.K., (2022). Random projection and hashing based privacy preserving for image retrieval paradigm using invariant and clustered feature. *Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences* 34, 6829–6846. <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2022.04.018>
7. Wan, M., Chen, X., Zhao, C., Zhan, T., Yang, G., (2022). A new weakly supervised discrete discriminant hashing for robust data representation. *Information Sciences* 611, 335–348. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2022.08.015>
8. Muja, M., Lowe, D.G., (2014). Scalable Nearest Neighbor Algorithms for High Dimensional Data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 36, 2227–2240. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2014.2321376>
9. Klingensmith, M., Dryanovski, I., Srinivasa, S., Xiao, J., (2015). Chisel: Real Time Large Scale 3D Reconstruction Onboard a Mobile Device using Spatially Hashed Signed Distance Fields, in: *Robotics: Science and Systems XI*. Presented at the Robotics: Science and Systems 2015, Robotics: Science and Systems Foundation. <https://doi.org/10.15607/RSS.2015.XI.040>
10. Dashkevych, A. (2021), Computational approach to solving problems of spatial processing of point sets on two-dimensional regular grids. *Herald of the National Technical University "KhPI"*. Subject issue: *Information Science and Modelling*, No. 2(6), 37-43. <https://doi.org/10.20998/2411-0558.2021.02.02>

11. Dashkevych, A. (2023), Generalized approach to the problems of representation and processing of grid-based geometric models. Modern Problems of Modeling, No. 25, 102-109. <https://doi.org/10.33842/2313-125X-2023-25>

Поступила (received) 29.05.2024

Статтю представив д-р. техн. наук, проф., зав. каф. геометричного моделювання та комп'ютерної графіки Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут", Шоман Ольга Вікторівна

Dashkevych Andrii, Cand. Tech, Sci.
National Technical University "KhPI",
Str. Кургучова, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel.: +38 (095) 388-04-56, e-mail: dashkevich.a@gmail.com
ORCID ID:0000-0002-9963-0998

УДК 004.932

Підхід до моделювання просторової взаємодії точкових множин на цілочисельних регулярних сітках / Дашкевич А.О. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2024. – № 1 – 2 (11 – 12). – С. 140 – 152.

В роботі продемонстровано узагальнений підхід до моделювання взаємодії точок та точкових множин на цілочисельних регулярних сітках в метричних просторах. Процес моделювання базується на визначенні просторових відносин в парах "Точка-Множина" та «Множина-Множина», що дозволяє визначати просторову взаємодію між довільними геометричними об'єктами, що задані як сіткові геометричні моделі (СГМ), які являють точкові множини на регулярних сітках, в роботі розроблені узагальнені схеми просторової взаємодії. В результаті роботи розроблено програмне забезпечення для проведення комп'ютерних експериментів із моделювання взаємодії в метричних просторах довільної розмірності та візуалізації їх результатів. Розроблений підхід протестовано на наборах даних різної розмірності. Іл.: 10. Бібліогр.: 11 назв.

Ключові слова: моделювання просторової взаємодії, точкова множина, цілочисельна регулярна сітка, сіткова геометрична модель.

UDC 004.932

An approach to modeling the spatial interaction of point sets on integer regular grids / Dashkevych A. // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2024. – № 1 – 2 (11 – 12). – С. 140 – 152.

The paper demonstrates a generalized approach to modeling the interaction of points and point sets on integer regular grids in metric spaces. The modeling process is based on the definition of spatial relations in "Point-Set" and "Set-Set" pairs, which allows to determine the spatial interaction between arbitrary geometric objects, defined as grid-based geometric models (GGM), which represent point sets on regular grids, generalized schemes of spatial interaction are developed in the work. As a result of the work, software was developed for conducting computer experiments on simulation of interaction in metric spaces of arbitrary dimensions and visualization of their results. The developed approach was tested on data sets of different dimensions. Figs.: 10. Refs.: 11 titles.

Keywords: modeling of spatial interaction, point set, integer regular grid, grid-based geometric model.