

УДК 517.946

*Н.К. МАМАДАЛИЕВ*, канд. физ.-мат. наук, доц. НУУз, Ташкент,  
*А.А. АБДУЛЛАЕВ*, аспирант, НУУз, Ташкент

### **О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ-ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА**

В данной работе впервые доказано однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, т.е. для уравнения, где линия вырождения является огибающей семейства характеристик и сама также является характеристикой. Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование – методом интегральных уравнений. Библиогр.: 10 назв.

**Ключевые слова:** нелокальная краевая задача, условия Пуанкаре, уравнения эллиптико-гиперболического типа, уравнения смешанного типа второго рода.

**Постановка проблемы.** Уравнение смешанного типа благодаря приложениям при решении многих важных вопросов прикладного характера: теории газовой динамики, электронного рассеивания, бесконечно малых изгибаний поверхностей, прогнозирования уровня грунтовых вод, также задача сопла Ловаля – является одним из основных направлений теории дифференциальных уравнений в частных производных, которая интенсивно развивается с пятидесятих годов прошлого века.

Работ, посвященных исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа второго рода, сравнительно мало. До сих пор остается неисследованной задача Пуанкаре-Трикоми для эллиптико-гиперболического уравнения второго рода, которой посвящена настоящая работа.

**Анализ литературы.** В конце прошлого века бурно развивались исследования по теории уравнений смешанного типа. Изучены краевые задачи Геллерстедта, Трикоми и много краевые задачи с различными нелокальными условиями для уравнений как парабола-гиперболического так и эллиптико-гиперболического типов. При доказательстве существования решения этих задач использованы, в основном, теория интегральных уравнений [1, 2]. В работе [3] исследована задача Трикоми для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода в обобщенном классе  $R_2$ . После появления этой работы для уравнений эллиптико-гиперболического типа изучены такие задачи как задача

Франкля, Бицадзе-Самарского и т.д. Во всех вышеперечисленных работах использовано непрерывное решение видоизменённой задачи Коши для уравнения гиперболического типа, полученное С.А. Терсеновым [4]. Однако в исследованных задачах, в основном, использовано представление решения Терсенова, с помощью которого не всегда удается доказать однозначную разрешимость многих краевых задач. Это способствовало рождению интереса у многих ученых этого направления к нахождению более удобного представления решения задачи Коши для гиперболического уравнение. В работе [5] опубликовано новое представление обобщенного решения видоизменённой задачи Коши для гиперболического уравнения второго рода, которое позволило решить вышеперечисленных задач для уравнения смешанного типа второго рода [6, 7, 8]. В последнее время, благодаря полученному представлению обобщенного решения видоизменённой задачи Коши для гиперболического уравнения второго рода, снимаются некоторые жёсткие условия в ранее проведенных исследованиях. В работе [9] изучена задача Пуанкаре-Трикоми для уравнения смешанного типа с разрывными коэффициентами. Новизна данной работы – в постановке задачи с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода, в котором существование решения исследуется впервые с помощью представления обобщенного решения видоизменённой задачи Коши для гиперболического уравнения второго рода.

**Цель статьи** – исследовать однозначную разрешимость нелокальной краевой задачи с условием Пуанкаре для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -1 < m < 0, \quad (1)$$

в области  $D = D_1 \cup D_2$ , где  $D_1$  – ограничена кривой  $\sigma$  при  $y > 0$  с концами в точках  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$  и отрезком  $AB$  ( $y = 0$ ), а  $D_2$  – при  $y < 0$  ограничена тем же отрезком  $AB$  и характеристиками уравнения (1).

**Задача.** Требуется найти функцию  $u(x, y)$ , обладающую следующими свойствами:

1)  $u(x, y) \in C(\bar{D})$  – является регулярным решением уравнения (1) в области  $D_1$ , а в области  $D_2$  – обобщенным решением из класса  $R_2$  [6];

2) выполняется условие склеивание

$$-u_y(x, -0) = u_y(x, +0); \quad (2)$$

3) удовлетворяет следующим граничным условиям

$$\{a(s)A_s[u] + b(s)u\}|_{\sigma} = \varphi(s), \quad 0 < s < l; \quad (3)$$

$$D_{0x}^{1-\beta} u[\theta_0(x)] = c(x)u(x, 0) + f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (4)$$

где  $s$  – длина дуги  $\sigma$ , отсчитываемой от точки  $B(1, 0)$ ,  $\theta_0(x)$  – точка пересечения характеристики уравнения (1), а  $a(s), b(s), \varphi(s), c(x), f(x)$  – заданные функции, причём

$$a(s)b(s) \geq 0, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad a(s), b(s), \varphi(s) \in C[0, l],$$

а  $f(x)$  – может иметь особенность порядка меньше чем  $-2\beta$ , где

$$\beta = \frac{m}{2(m+2)}.$$

Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии. Переходим к исследованию поставленной задачи.

Решение задачи в области  $D_1$ , удовлетворяющее условию (3) и  $u|_{y=0} = \tau(x)$ , ( $0 \leq x \leq 1$ ), имеет вид [3]:

$$u(x, y) = \int_0^1 \tau(\xi) \frac{\partial}{\partial \eta} G_2(\xi, 0, x, y) d\xi + \int_0^l \frac{\varphi(s)}{a(s)} G_2(\xi, \eta, x, y) ds, \quad (5)$$

где  $G_2(\xi, \eta, x, y)$  – функция Грина данной задачи в области  $D_1$ , а в области  $D_2$ , решая видоизмененную задачу Коши для гиперболического уравнения, получим обобщенное решение из класса  $R_2$  [1]:

$$u(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} (\eta - \zeta)^{-\beta} (\xi - \zeta)^{-\beta} T(\zeta) d\zeta + \int_{\xi}^{\eta} (\eta - \zeta)^{-\beta} (\zeta - \xi)^{-\beta} N(\zeta) d\zeta, \quad (6)$$

где

$$N(\zeta) = \frac{1}{2\pi \cos \pi\beta} T(\zeta) - \gamma_2 v(\zeta), \quad (7)$$

$$\gamma_2 = [2(1-2\beta)]^{2\beta-1} \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

а  $T(\zeta)$  определяется из следующего определения:

**Определение.** Функция  $u(\xi, \eta)$ , определённая формулой (6), называется обобщенным решением задачи Коши для уравнения (1) в области  $D_2$  из класса  $R_2$  [6], в котором  $\tau(x)$  имеет вид:

$$\tau(x) = \int_0^x (x-t)^{-2\beta} T(t) dt,$$

где  $v(x)$  и  $T(x)$  – непрерывные и интегрируемые функции в интервале  $(0;1)$  и  $T(x)$  – интегрируема на  $[0;1]$ .

Из равенств (5) и (6) получаем следующие функциональные соотношения между  $\tau(x)$  и  $v(x)$ :

$$\begin{aligned} v(x) = & \frac{k_2}{2\beta(2\beta-1)} \left[ \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau'(t)}{(x-t)^{-2\beta}} dt + \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\tau'(t)}{(t-x)^{-2\beta}} dt \right] - \\ & - k_2 \int_0^1 \frac{\tau(t) dt}{(t+x-2xt)^{2-2\beta}} + \int_0^1 \tau(t) \frac{\partial^2 H_2(t,0;x,0)}{\partial \eta \partial y} dt + \\ & + \int_0^l \chi(s) \frac{\partial q_2(\xi, \eta; x, 0)}{\partial y} ds + \frac{k_2}{\beta(2\beta-1)} x^{2\beta} \tau'(0) \end{aligned} \quad (8)$$

и

$$\begin{aligned} \tau'(x) = & -2\beta\gamma_3 \int_0^x (x-t)^{-2\beta-1} v(t) dt - \\ & - 2\beta\gamma_3 \int_0^x (x-t)^{-2\beta-1} dt \int_0^t R(t, z) v(z) dz + F_0'(x), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$F_0(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x (x-t)^{-2\beta} t^\beta f(t) dt + \frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x (x-t)^{-2\beta} dt \int_0^t R(t, z) t^\beta f(z) dz,$$

а  $R(t, z)$  – есть резольвента следующего интегрального уравнения

$$T(x) = \lambda_1 \int_0^x K(x, t) T(t) dt + F(x),$$

где  $K(x, t) = (x - t)^{-2\beta} x^\beta c(x)$ ,  $F(x) = \frac{x^\beta f(x)}{\Gamma(1 - \beta)} + \gamma_3 v(x)$ ,  $\lambda_1 = \frac{2 \cos \pi \beta}{\Gamma(1 - \beta)}$ ,

$\gamma_3 = 2\pi\gamma_2 \cos \pi\beta$ .

Существование решения задачи для уравнения (1) в силу (5) и (6) эквивалентно разрешимости системы (8) и (9). Подставляя (8) в (9) после некоторых вычислений, с учётом условия склеивания (2) и  $x^{2\beta} \tau'(x) = \rho(x)$ , получим следующее сингулярное интегральное уравнение с ядром типа Коши:

$$\rho(x) - \lambda \int_0^1 \frac{\rho(t)}{t - x} dt = F(x),$$

где  $\lambda = \frac{\cos \pi \beta}{\pi(1 + \sin \pi \beta)}$ .

Далее, применяя известный метод регуляризации Карлемана-Векуа [2], получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода, эквивалентное поставленной задаче:

$$\begin{aligned} \tau'(x) = & \frac{1}{2} \Phi_1(x) + \\ & + \frac{\cos \pi \beta}{2\pi(1 + \sin \pi \beta)} (1 - x)^{-\frac{1}{4}(1 - 2\beta)} x^{\frac{1}{4} - \frac{5}{2}\beta} \int_0^1 \frac{(1 - t)^{-\frac{1}{4}(1 - 2\beta)} t^{\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\beta\right)}}{t - x} \Phi_1(t) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) является уравнением Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения сформулированной задачи. Определив из уравнения (10) функцию  $\tau'(x)$ , находим функцию  $v(x)$  из равенства (8). Далее, определяя функции  $\tau(x)$  и  $v(x)$ , имея ввиду (4) и (7), по формулам (6) и (5) получим решение задачи соответственно в областях  $D_2(y < 0)$  и  $D_1(y > 0)$ .

**Выводы.** Таким образом, согласно вышеприведенных ограничений на заданные функции, доказано существование решения рассматриваемой задачи.

**Список литературы:** 1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1970. – 270 с. 2. Салахитдинов М.С. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами / М.С. Салахитдинов, М. Мирсабуров. – Ташкент: "Университет", 2005. – 224 с. 3. Кароль И.Л. К теории уравнений смешанного типа

/ И.Л. Кароль // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 88. – № 3. – С. 397-400. 4. Терсенов С.А. К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырождения / С.А. Терсенов // Сиб. мат. журнал РАН. – 1961. – Т. 2. – № 6. – С. 931-935. 5. Мамадалиев Н.К. О представлении, решения видоизмененной задачи Коши / Н.К. Мамадалиев // Сиб. мат. журнал РАН. – 2000. – Т. 41. – № 5. – С. 1087-1097. 6. Mamadaliev N.K. Tricomi problem for strongly Degenarate Equations of Parabolic-Hyperbolic type / N.K. Mamadaliev // Mathematical Notss. – Curler Academic / Plenum-publishers. – 1999/2000. – Vol. 66. – № 3.– P. 310-315. 7. Mamadaliev N.K. The Gellerstred Problem for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind / N.K. Mamadaliev // Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations. – 2007. – Vol. 1. – № 2. – P. 102-108. 8. Salahitdinov M.S. Tricomi problem for the elliptic-hyperbolic equation of the second kind / M.S. Salahitdinov, N.K. Mamadaliev // The Journal of the Korean Mathematical Society (JKMS). – 2011. – Vol. 19. – №. 2. – P. 111-127. 9. Салахитдинов М.С. Задача Пуанкаре-Трикоми для уравнения смешанного типа с разрывными коэффициентами / М.С. Салахитдинов, Д. Аманов // В сб. "Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей". – Ташкент: Фан, 1987. – С. 3-38. 10. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения / М.С. Салахитдинов., Б.И. Исломов. – Ташкент: "Мумтоз суз", 2010. – 264 с.

Поступила в редакцию 07.08.2013

После доработки 11.12.13

УДК 517.946

**Про вирішення задачі Пуанкаре-Трікомі для рівняння змішаного типу другого роду / Мамадалиєв Н.К., Абдулаєв А.А.** // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2013. – № 19 (992). – С. 81 – 86.

У даній роботі вперше доведено однозначне розв'язання нелокальної краєвої задачі з умовою Пуанкаре для рівняння еліптико-гіперболического типу другого роду, тобто для рівняння, де лінія звиродіння є такою, що огинає сімейства характеристик і сама також є характеристикою. Єдиність рішення задачі доводиться методом інтегралів енергії, а існування – методом інтегральних рівнянь. Бібліогр.: 10 назв.

**Ключові слова:** нелокальна краєва задача, умови Пуанкаре, рівняння еліптико-гіперболического типу, рівняння змішаного типу другого роду.

UDC 517.946

**About solubility of solution of the Poincare – Tricomi problem for the mixed type equation of the second kind / Mamadaliev N.K., Abdullayev A.A.** / Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2013. – № 19 (992). – P. 81 – 86.

In the work is for the first time proved unambiguous solubility nonlocal boundary problem with Poincare condition for the elliptic-hyperbolic equation of the second kind for equation, where line of the degeneration is bending around family of the characteristic and itself also is a characteristic. Unique solution of the problem is proved by method integral to energy, and existence by method of the integral equations. Refs.: 10 titles.

**Keywords:** nonlocal boundary problem, condition Poincare, elliptic-hyperbolic equation of the second kind.