УДК 861.5.015.2 **DOI: 10.20998/2411-0558.2017.21.04**

В.Д. ДМИТРИЕНКО, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПИ",
А.Ю. ЗАКОВОРОТНЫЙ, д-р техн. наук, доц., ученый секретарь НТУ "ХПИ",
Н.В. МЕЗЕНЦЕВ, канд. техн. наук, доц., НТУ "ХПИ",
Д.М. ГЛАВЧЕВ, асп. НТУ "ХПИ"

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМ СОСТАВОМ, МЕТОДАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассматривается задача линеаризации математической модели, описывающей процессы управления подвижным составом, с целью получения удобного инструмента для оптимизации процессов движения объекта управления. Задача линеаризации решается с помощью геометрической теории управления. При этом основные аналитические преобразования автоматизированы с помощью специализированного программного обеспечения. Поиск функций преобразования, связывающих переменные линейной и нелинейной моделей, осуществляется с помощью нового конструктивного метода решения системы дифференциальных уравнений в частных производных. Библиогр.: 10 назв.

Ключевые слова: линеаризация математической модели; подвижной состав; геометрическая теория управления; функции преобразования.

Постановка проблемы и анализ литературы. Большое число различных технических объектов рационально описывать и исследовать с помощью систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых часто удобно представлять в виде кривых и поверхностей в трехмерном пространстве. Поскольку одно из основных назначений дифференциальной геометрии состоит в изучении свойств таких геометрических объектов, то неудивительно, что на стыке теории управления техническими объектами и дифференциальной геометрии возникла геометрическая теория управления [1, 2], которая находит определенное применение при поиске оптимальных управлений различными объектами. Привлекательность геометрической теории управления (ГТУ) связана, в первую очередь, с получением эквивалентных нелинейным линейных моделей, которые удобно использовать для решения задач оптимального управления. Более широкому применению геометрической теории управления препятствуют громоздкие аналитические преобразования, связанные с вычислением производных и скобок Ли, определением инволютивности распределений и т.д [1 – 4], а также проблема определения функций преобразования, связывающих переменные линейных моделей в форме

Бруновского и исходных нелинейных моделей технических объектов управления. Большую часть аналитических преобразований удается автоматизировать с помощью специализированного программного обеспечения [4, 5]. Однако проблема определения функций преобразования в общем случае требует своего решения, что связано с необходимостью решения системы дифференциальных уравнений в частных производных вида:

$$
\begin{aligned}
& a_{11}\frac{\partial T_g(x)}{\partial x_1} + a_{12}\frac{\partial T_g(x)}{\partial x_2} + \ldots + a_{1n}\frac{\partial T_g(x)}{\partial x_n} = 0; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{q1}\frac{\partial T_g(x)}{\partial x_1} + a_{q2}\frac{\partial T_g(x)}{\partial x_2} + \ldots + a_{qn}\frac{\partial T_g(x)}{\partial x_n} = 0; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{r1}\frac{\partial T_g(x)}{\partial x_1} + a_{r2}\frac{\partial T_g(x)}{\partial x_2} + \ldots + a_{rn}\frac{\partial T_g(x)}{\partial x_n} = 0; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& a_{k1}\frac{\partial T_g(x)}{\partial x_1} + a_{k2}\frac{\partial T_g(x)}{\partial x_2} + \ldots + a_{kn}\frac{\partial T_g(x)}{\partial x_n} = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{kn}$ – постоянные коэффициенты, задаваемые векторным полем объекта управления; $T_g(x)$ – неизвестная функция преобразования для g-ой клетки Бруновского; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор фазовых переменных исходного объекта; $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{kn}$ – коэффициенты, определяемые производными Ли от функции $T_g(x)$ векторного аргумента x. Число уравнений в системе (1) зависит как от числа управлений, так и от индекса управляемости соответствующей клетки Бруновского. При числе управлений $l = 3$ и индексе управляемости, равном 4, число уравнений равно 12. Решение системы уравнений (1) в общем случае не является тривиальной задачей [1, 6]. В связи с этим в работе [7] был предложен поиск функций преобразований $T_g(x)$, где $g = 1, 2, \ldots, k_g$, k_g – число клеток Бруновского, с помощью нейронной сети, а также метод, связанный с уменьшением числа аргументов, от которых может зависит функция $T_g(x)$. При этом на правые части системы обыкновенных дифференциальных уравнений объекта управления наложены ограничения: только одно уравнение содержит три одночлена, а остальные уравнения содержат не более двух одночленов. Увеличение числа одночленов в правых частях дифференциальных уравнений объекта управления может приводить к системам уравнений вида (1), которые требуют других подходов к их решению.

Целью статьи является разработка метода решения системы (1) уравнений в частных проводных, который расширяет возможность вышеуказанных методов решения этой системы.

Пусть дизель-поезд описывается как одномассовый объект с одним эквивалентным асинхронным двигателем [3, 8]:

$$\begin{aligned}
&\frac{dS}{dt} = k_s\omega;\\
&\frac{d\omega}{dt} = k_1\mu\Psi_d i_q - a_{20} - a_{21}\omega - a_{22}\omega^2 - M(S);\\
&\frac{di_d}{dt} = -\gamma i_d + p\omega i_q + \alpha L_m \frac{i_q^2}{\Psi_d} + \alpha\beta\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}u_d;\\
&\frac{d\Psi_d}{dt} = -\alpha\Psi_d + \alpha L_m i_d;\\
&\frac{d\rho}{dt} = p\omega + \alpha L_m \frac{i_q}{\Psi_d};\\
&\frac{di_q}{dt} = -\gamma i_q - p\omega i_d - \alpha L_m \frac{i_d i_q}{\Psi_d} - p\beta\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s}u_q,
\end{aligned} \qquad (2)$$

где S – расстояние, отсчитываемое от начала движения дизель-поезда; t – текущее время, отсчитываемое от начала движения состава; k_s, k_1, a_{20}, a_{21}, a_{22} – постоянные коэффициенты; ω – угловая скорость вращения эквивалентного тягового асинхронного электродвигателя; $k_s\omega = V$ – скорость движения объекта; $\mu = pL_m / JL_r$; p, J – соответственно число пар полюсов статора электродвигателя и момент инерции объекта, приведенный к валу электродвигателя; L_m, L_r – соответственно индуктивность контура намагничивания и полная индуктивность ротора; $\Psi_d = \sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}$ – потокосцепление ротора двигателя; Ψ_{ur}, Ψ_{vr} – потокосцепления ротора двигателя соответственно по осям u и v; $i_d = i_{us}\cos\rho - i_{vs}\sin\rho$ – ток статора по оси d в системе координат d,q; $i_q = i_{vs}\cos\rho - i_{us}\sin\rho$ – ток статора по оси q в системе координат d,q; $\rho = \arcsin(\Psi_{vr}/\sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2})$ или $\rho = \arccos(\Psi_{ur}/\sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2})$; i_{vs}, i_{us} – токи статора по осям v и u; $M(S)$ – момент, зависящий от профиля пути, в первом приближении можно принять, что $M(S) = b_0 + b_1 S + b_2 S^2 + b_3 S^3$; $\gamma = R_r L_m^2/\sigma L_s L_r^2 + R_s/\sigma L_s$; σ, L_s – соответственно полный коэффициент рассеяния и полная индуктивность статора; $\alpha = 1/T_r$; T_r – постоянная времени ротора эквивалентного двигателя; $\beta = L_m/(\sigma L_s L_r)$; $u_d = u_{us}\cos\rho + u_{vs}\sin\rho$; $u_q = u_{vs}\cos\rho + u_{us}\sin\rho$.

Введя обозначения: $x_1 = S$; $x_2 = \omega$; $x_3 = i_d$; $x_4 = \Psi_d$; $x_5 = \rho$; $x_6 = i_q$; $a_{11} = k_s$; $a_{21} = k_1\mu$; $a_{22} = -a_{20}$; $a_{23} = -a_{21}$; $a_{24} = -a_{22}$; $a_{25} = b_0$; $a_{26} = b_1$; $a_{27} = b_2$; $a_{28} = b_3$; $a_{31} = -\gamma$; $a_{41} = -\alpha$; $a_{42} = \alpha L_m$; $a_{51} = p$; $a_{52} = a_{42}$; $a_{61} = a_{31}$; $u_1 = p\omega i_q + \alpha L_m i_q^2/\Psi_d + \alpha\beta\Psi_d + u_d/(\sigma L_s)$; $u_2 = -p\omega i_d - \alpha L_m i_d i_q/\Psi_d - p\beta\omega\Psi_d + u_q/(\sigma L_s)$.

Из системы уравнений (2) получим следующую модель, описывающую движение состава:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_2;\\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_3x_6 + a_{22} + a_{23}x_2 + a_{24}x_2^2 + a_{25} + a_{26}x_1 + a_{27}x_1^2 + a_{28}x_1^3;\\
\dot{x}_3 &= a_{31}x_3 + a_{32}x_4;\\
\dot{x}_4 &= a_{41}x_4 + u_1;\\
\dot{x}_5 &= a_{51}x_2 + a_{52}\frac{x_6}{x_3};\\
\dot{x}_6 &= a_{61}x_6 + u_2.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

С системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (3) связаны следующие векторные поля:

$$
\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} g_1 = a_{11}x_2 \\ g_2 = a_{21}x_3x_6 + a_{225} + a_{23}x_2 + a_{24}x_2^2 + a_{26}x_1 + a_{27}x_1^2 + a_{28}x_1^3 \\ g_3 = a_{31}x_3 + a_{32}x_4 \\ g_4 = a_{41}x_4 \\ g_5 = a_{51}x_2 + a_{52}\dfrac{x_6}{x_3} \\ g_6 = a_{61}x_6 \end{vmatrix};
$$

$$
Y_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}; \quad Y_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}},
$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$; $a_{225} = a_{22} + a_{25}$.

Для определения возможного преобразования нелинейной системы (3) к линейному виду в форме Бруновского необходимо проверить условия инволютивности для распределений M^0, M^1, M^2 [1, 3].

Распределение $M^0 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2\}$, где $\mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2\}$ – линейная оболочка векторов $\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2$, инволютивно в силу постоянства соответствующих векторов.

Проанализируем теперь распределение $M^1 = \mathrm{span}\{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{L_X Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2\}$, где $\boldsymbol{L_X Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2$ – соответственно производные Ли векторных полей $\boldsymbol{Y}_i\ (i = 1, 2)$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$:

$$
\boldsymbol{L_X Y}_1 = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_1] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_1}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1 = -\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1 =
$$

$$
= -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_6} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_6} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_6}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_6}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_6}{\partial x_6} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =
$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{26}+2a_{27}x_1+3a_{28}x_1^2 & a_{23}+2a_{24}x_2 & a_{21}x_6 & 0 & 0 & a_{21}x_3 \\ 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{41} & 0 & 0 \\ 0 & a_{51} & \dfrac{-a_{52}x_6}{x_3^2} & 0 & 0 & \dfrac{a_{52}}{x_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{61} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_{32} \\ -a_{41} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$\boldsymbol{L_X Y}_2 = \left[\boldsymbol{X},\, \boldsymbol{Y}_2\right] = -\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{Y}_2 = \begin{vmatrix} 0 & -a_{21}x_3 & 0 & 0 & -\dfrac{a_{52}}{x_3} & -a_{61} \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Для выполнения инволютивности распределения M^1 необходимо, чтобы ранг матрицы $\operatorname{rank}(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{L_X Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2, [\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j])$, где $\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j$ – векторные поля из семейства $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{L_X Y}_1, \boldsymbol{L_X Y}_2)$ был равен четырем. Поскольку это условие не выполняется, то распределение M^1 не является инволютивным. В связи с этим в систему уравнений (3) необходимо вводить дополнительное уравнение. Введем его во вторую часть системы уравнений (3):

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = a_{11}x_2 = f_1; \\ &\dot{x}_2 = a_{21}x_3x_6 + a_{225} + a_{23}x_2 + a_{24}x_2^2 + a_{25} + a_{26}x_1 + a_{27}x_1^2 + a_{28}x_1^3 = f_2; \\ &\dot{x}_3 = a_{31}x_3 + a_{32}x_4 = f_3; \\ &\dot{x}_4 = a_{41}x_4 + u_1 = f_4 + u_1; \\ &\dot{x}_5 = a_{51}x_2 + a_{52}\frac{x_6}{x_3} = f_5; \\ &\dot{x}_6 = a_{61}x_6 + x_7 = f_6; \\ &\dot{x}_7 = u_2, f_7 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

С новой моделью объекта управления связаны следующие векторные поля:

$$\boldsymbol{X}^* = \left|f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_7\right|^{\mathrm{T}};\ \boldsymbol{Y}_1^* = \left|0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\right|^{\mathrm{T}};\ \boldsymbol{Y}_2^* = \left|0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\right|^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

Проверка инволютивности распределений $M^0 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*\}$, $M^1 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^*\}$, $M^2 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2\boldsymbol{Y}_2^*\}$, $M^3 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*, \ldots, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^3\boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^3\boldsymbol{Y}_2^*\}$ показала, что все распределения инволютивны. Таким образом, система уравнений (4) может быть преобразована к канонической форме Бруновского, которая имеет две клетки с индексами управляемости $k_1 = 4$ и $k_2 = 3$:

$$\begin{aligned} &\frac{dz_i}{dt} = z_{i+1},\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6; \\ &\frac{dz_4}{dt} = v_1,\ \frac{dz_7}{dt} = v_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Для системы уравнений (6) существуют преобразования $z_1 = T_1(x) = T_1(x_1, x_2, ..., x_7)$ и $z_5 = T_2(x_1, x_2, ..., x_7)$ с помощью которых путем дифференцирования функций $T_1(x)$ и $T_2(x)$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}^* + u_1^*\boldsymbol{Y}_1^* + u_2^*\boldsymbol{Y}_2^*$ можно определить z_2, z_3, z_5, z_6.

В результате дифференцирования функций $T_1(x)$, $T_2(x)$ имеем:

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}T_1(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}T_1(\boldsymbol{x}^*) + u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}T_1(\boldsymbol{x}^*); \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_2}{dt} = z_3 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}(T_1(\boldsymbol{x}^*)) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}(T_1(\boldsymbol{x}^*))) + \\ + u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}(T_1(\boldsymbol{x}^*))); \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_3}{dt} = z_4 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}(T_1(\boldsymbol{x}^*)) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}(T_1(\boldsymbol{x}^*))) + \\ + u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}(T_1(\boldsymbol{x}^*))); \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_4}{dt} = v_1 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}^4_{\boldsymbol{X}^*}(T_1(\boldsymbol{x}^*)) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) + \\ + u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)); \end{aligned} \tag{10}$$

$$\frac{dz_5}{dt} = z_6 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}T_2(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}T_2(\boldsymbol{x}^*) + u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}T_2(\boldsymbol{x}^*); \tag{11}$$

$$\frac{dz_6}{dt} = z_7 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}(T_2(\boldsymbol{x}^*)) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)) + \\ + u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}T_2(\boldsymbol{x}^*); \tag{12}$$

$$\frac{dz_7}{dt} = v_2 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}(T_2(\boldsymbol{x}^*)) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)) + \\ + u_2^*\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{Y}_2^*}T_2(\boldsymbol{x}^*), \tag{13}$$

где $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}T_k(\boldsymbol{x}^*)$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_k(\boldsymbol{x}^*)$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}T_k(\boldsymbol{x}^*)$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}T_k(\boldsymbol{x}^*)$, $k = 1, 2$ – производные Ли функций $T_k(\boldsymbol{x}^*)$ вдоль векторных полей $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}^*$, $\boldsymbol{Y}_1^*$, $\boldsymbol{Y}_2^*$; $\boldsymbol{L}_G^m$ – кратные производные Ли вдоль векторного поля G ($G = \boldsymbol{X}^*$, $\boldsymbol{Y}_1^*$, $\boldsymbol{Y}_2^*$), $m = 2, 3$.

Из системы уравнений в форме Бруновского следует, что переменные z_1, z_2, z_3, z_5 и z_6 не зависят от управлений v_1 и v_2. Следовательно, в выражениях (7) – (9), (11), (12) коэффициенты при управлениях u_1^* и u_2^* равны нулю:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}T_1(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}T_1(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \\ = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = 0; \tag{14}$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}T_2(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}T_2(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{Y}_1^*}T_2(\boldsymbol{x}^*) = 0. \tag{15}$$

При этом коэффициенты при управлениях u_1^* и u_2^* в уравнениях (10) и (13) не равны нулю:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^3_{X^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}^3_{X^*}\boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle \neq 0; \\ \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}^3_{X^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}^3_{X^*}\boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle \neq 0; \tag{16}$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^2_{X^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}^2_{X^*}\boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle \neq 0; \\ \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}^2_{X^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}^2_{X^*}\boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle \neq 0. \tag{17}$$

Соотношения (14) – (17) в компактной форме описывают систему из 10 дифференциальных уравнений в частных проводных и четыре дифференциальных неравенства, с помощью которых можно определить функции преобразования $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ и $T_2(\boldsymbol{x}^*)$. Эти функции в общем случае могут зависеть от семи компонент вектора $\boldsymbol{x}^* = (x_1, x_2, \ldots, x_7)$. Из первых двух дифференциальных уравнений имеем:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*} T_1(\boldsymbol{x}^*) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x^*}, \boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i^*} y_{1i} = \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2} \cdot 0 +$$

$$+ \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_3} \cdot 0 + + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_4} \cdot 1 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_6} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_7} \cdot 0 .$$

Отсюда следует, что функция $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ не зависит от аргумента x_4.

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*} T_1(\boldsymbol{x}^*) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x^*}, \boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i^*} y_{2i} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_7} \cdot 1 .$$

Поэтому функция $T_1(\boldsymbol{x}^*)$не зависит от x_7. Таким образом, $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ не зависит от x_4 и x_7.

Для дальнейшего анализа функции $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ необходимо использовать из соотношения (14) следующие четыре дифференциальных уравнения в частных производных, в которых используются производные Ли первого и второго порядка:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} \boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = 0; \tag{18}$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} \boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = 0; \tag{19}$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*} (\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*} \boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = 0; \tag{20}$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*} (\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*} \boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = 0, \tag{21}$$

где

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^* = [\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}_1^*] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_1^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{X}^* - \frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_1^* = -\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_1^* =$$

$$= \left|\ 0\ 0 - a_{32}\ a_{41}\ 0\ 0\ 0\ \right|^{\mathrm{T}}; \qquad (22)$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^* = [\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}_2^*] = -\frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{Y}_2^* = \left|\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ \right|^{\mathrm{T}}; \qquad (23)$$

$$\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^* = \left|\ 0,\ a_{21}a_{23}x_6,\ a_{32}(a_{31}+a_{41}),\ a_{41}^2,\ -(a_{32}a_{52}x_6 / x_3^2),\ 0,\ 0\ \right|^{\mathrm{T}}; \qquad (24)$$

$$\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^* = \left|\ 0,\ a_{21}x_{31},\ 0,\ 0,\ a_{52}/x_{31},\ a_{61},\ 0\ \right|^{\mathrm{T}}. \qquad (25)$$

Из соотношений (18) и (22) получим:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \left|\ 0\ 0 - a_{32}\ - a_{41}\ 0\ 0\ 0\ \right|^{\mathrm{T}} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_3}\cdot(-a_{32}) + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_4}\cdot(-a_{41}) = 0.$$

Поскольку $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ не зависит от x_4, то $\frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_4} = 0$ и отсюда следует, что $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ не зависит от x_3, т.е. $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ не зависит от x_3, x_4, x_7.

Из соотношений (19), (23) имеем

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \left|\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ \right|^{\mathrm{T}} \right\rangle =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 6}}^{7} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_6}\cdot(-1) = 0.$$

Отсюда следует, что $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ не зависит и от x_6.

Из выражений (20), (21) и (24), (25) с учетом того, что функция T_1 не зависит от x_3, x_4, x_6, x_7 несложно получить

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2}a_{21} - \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5}\frac{a_{52}}{x_3^2} = 0;$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2} a_{21}x_3 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5}\frac{a_{52}}{x_3} = 0.$$

Решение системы уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2} a_{21} - \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5}\frac{a_{52}}{x_3^2} = 0; \\ \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2} a_{21}x_3 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5}\frac{a_{52}}{x_3} = 0 \end{gathered} \tag{26}$$

показывает, что функция T_1 не зависит и от x_2, x_5. Таким образом, функция T_1 является функцией только одного аргумента x_1.

Теперь проверим выполнение неравенств (16). Для этой проверки необходимо знать $\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^*$ и $\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^*$. Эти производные Ли можно вычислить с помощью соотношения

$$\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_p^* = [\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_p^*] = \frac{\partial \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_p^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{X}^* - \frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_p^*, \; p = 1, 2.$$

Из выражений (16) следует

$$\left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial T_1}{\partial x_i}(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^*)_i \neq 0; \tag{27}$$

$$\left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial T_1}{\partial x_i}(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^*)_i \neq 0, \tag{28}$$

где $(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^*)_i$, $(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^*)_i, \; i = \overline{1, 7}$ – соответственно компоненты производных Ли $\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^*$, $\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^*$.

Поскольку функция преобразования $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ не зависит от $x_2, x_3, \ldots, x_7$, то производные $\frac{\partial T_1}{\partial x_2}, \frac{\partial T_1}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial T_1}{\partial x_7}$ равны нулю и соотношения (27), (28) можно записать в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^*)_1 = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(-a_{11}a_{21}a_{32}x_6) \neq 0; \tag{29}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}^*_2)_1 = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(-a_{11}a_{21}x_3) \neq 0, \qquad (30)$$

где $(-a_{11}a_{21}a_{32}x_6)$, $(-a_{11}a_{21}x_3)$ – соответственно первые компоненты производных Ли $\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}^*_1$, $\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}^*_2$.

Неравенства (29), (30) выполняются при $T_1 = x_1$ и $x_6 \neq 0$, $x_3 \neq 0$.

В общем случае система уравнений в частных производных (26) может иметь вид системы линейных однородных уравнений

$$\frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_k}\eta_1 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_q}\eta_2 = 0;$$

$$\frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_k}\eta_3 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_q}\eta_4 = 0,$$

где $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ – функции, зависящие в общем случае от компонент вектора $\boldsymbol{x}^*$ и коэффициентов $a_{11}, a_{12}, \ldots$. Такая система обладает нулевым решением $\frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_k} = \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_q} = 0$.

Нулевым решением обладает и система однородных уравнений, содержащих в общем случае m частных производных функции преобразования [10]:

$$\frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_k}\eta_{11} + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_{k+1}}\eta_{12} + \ldots, \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_{k+m-1}}\eta_{1m} = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_k}\eta_{m1} + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_{k+1}}\eta_{m2} + \ldots, \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_{k+m-1}}\eta_{mm} = 0,$$

где η_{ij} $(i,\ j = \overline{1,\ m})$ – в общем случае функции, зависящие от компонент вектора $\boldsymbol{x}^*$ и коэффициентов $a_{11}, a_{12}, \ldots$.

Таким образом, предложен конструктивный подход к уменьшению числа аргументов функций преобразования.

В рассматриваемой задаче при $T_1(\boldsymbol{x}^*) = x_1 = z_1$ выполняются все соотношения (14) и (16). Зная $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ путем последовательного взятия производных Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}^*$ несложно получить выражения, связывающие переменные линейной и нелинейной моделей для первой клетки канонической формы Бруновского:

$$z_2 = \boldsymbol{L}_{\mathbf{X}^*} T_1(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} \mathbf{X}_i^* = a_{11} x_2;$$

$$z_3 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*))}{\partial x_i} \boldsymbol{X}_i^* = a_{11}(a_{21} x_3 x_6 + a_{225} +$$

$$+ a_{23} x_2 + a_{24} x_2^2 + a_{26} x_1 + a_{27} x_1^2 + a_{28} x_1^3);$$

$$z_4 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*))}{\partial x_i} \boldsymbol{X}_i^* \text{, и т.д.}$$

Аналогичным образом нетрудно определить функцию $T_2(\boldsymbol{x}^*)$, связывающую переменные линейной и нелинейной моделей для второй клетки канонической формы Бруновского.

Сопоставление результатов моделирования объекта управления с помощью моделей (4) и (6) показывает их полное совпадение, что подтверждает правильность математических преобразований как при получении модели (6), так и при получении функций преобразований, связывающих переменные линейной и нелинейной моделей. Полученные линейные модели могут быть использованы для поиска оптимальных управлений с помощью принципа максимума Понтрягина [3].

Выводы. При решении задачи линеаризации нелинейных моделей к эквивалентным линейным средствами геометрической теории управления предложен конструктивный метод определения функций преобразования, связывающих переменные линейной и нелинейной моделей, из системы дифференциальных уравнений в частных производных с дифференциальными ограничениями. Работоспособность метода продемонстрирована на линеаризации математической модели процессов движения состава с тяговым асинхронным приводом.

Список литературы: **1.** *Краснощёченко В.Н.* Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / *В.И. Краснощёченко, А.П. Крищенко*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с. **2.** *Kim D.P.* Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System / *D.P. Kim*. – Seal: Harnol, 2000. – 558 p. **3.** *Дмитриенко В.Д.* Моделирование и оптимизация процессов управления движением дизель-поездов / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковороный.* – Харьков: НТМТ, 2013. – 248 с. **4.** *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2 Многомерные нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: учебное пособие / *Д.П. Ким*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с. **5.** *Дмитриенко В.Д.* Преобразование нелинейных систем управления к эквивалентным линейным в канонической форме Бруновского / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный*

// Электротехнические системы и комплексы. – Магнитогорск: МГТУ, 2014. – № 4 (25). – С. 8 – 14. **6.** *Дмитриенко В.Д.* Автоматизация процессов преобразования нелинейных моделей к эквивалентным линейным в форме Бруновского / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный* // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ", 2014. – Вип. 62 (1104). – С. 22 – 37. **7.** *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / *В.И. Арнольд*. – М.: Наука, 1978. – 304 с. **8.** *Дмитриенко В.Д.* Метод поиска функций преобразования, связывающих переменные нелинейных и линейных моделей в ГТУ / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный, Д.М. Главчев* // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ", 2016. – Вип. 44 (1216). – С. 14 – 30. **9.** *Носков В.И.* Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов / *В.И. Носков, В.Д. Дмитриенко, Н.И. Заполовский, С.Ю. Леонов*. – Х.: ХФИ "Транспорт Украины", 2003. – 248 с. **10.** *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – СПб.: Лань, 2008. – 432 с.

References:

1. Krasnoshechenko, V.N., and Krishenko, A.P. (2005), "Nonlinear systems: geometrical method of analysis and synthesis", Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moskow, 520 p.

2. Kim, D.P. (2000), "Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System", Seal: Harnol, 558 p.

3. Dmitrienko, V.D., and Zakovorotny, A.Y. (2013), "Modelling and optimization of management processes of diesel trains", HTMT, Kharkiv, 248 p.

4. Kim, D.P. (2004), "Theory of automatic control. T. 2 Multidimensional nonlinear, optimal and adaptive systems", FYSMATLIT, Moskow, 464 p.

5. Dmitrienko, V.D., and Zakovorotny, A.Y. (2014), "Converting the nonlinear control systems equivalent to the linear canonical Brunovsky form", Electrical systems and complexes, Magnitogorsk: MSTU, Vol. No 4 (25), pp. 8-14.

6. Dmitrienko, V.D., and Zakovorotny, A.Y. (2014), "Automation of processes of transformation of nonlinear models to equivalent linear in the Brunovsky form", Herald of NTU "KhPI", Vol. No 62 (1104), pp. 22-37.

7. Arnold, V.I. (1978), "Additional chapters of the theory of ordinary differential equations", Science, Moskow, 304 p.

8. Dmitrienko, V.D., Zakovorotny, A.Y., and Hlavchev, D.M. (2016), "The method of searching for the transformation functions connecting the variables of nonlinear and linear models in the GCT", Herald of NTU "KhPI", No 44 (1216), pp. 14-30.

9. Noskov, V.I., Dmitrienko, V.D., Zapolovsky, N.I., and Leonov, S.Y. (2003), "Modelling and optimization of locomotive management and control systems", KhPhI "Transport of Ukraine", Kharkiv, 248 p.

10. Kurosh, A.G. (2008), *Course of Higher Algebra*. St. Petersburg., Lan, 432 p.

Статью представил д-р техн. наук, проф. Кучук Г.А.

Поступила (received) 05.06.2017

Dmitrienko Valerii, Dr. Tech.Sci., Professor
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel.: +38 (057) 707-61-98, e-mail: valdmitrienko@gmail.com
ORCID ID: 0000-0003-2523-595X

Zakovorotniy Alexandr, Dr. Tech.Sci., Docent
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel.: +38 (097) 967-32-71, e-mail: arcade@i.ua
ORCID ID: 0000-0003-4415-838X

Mezentsev Nickolay, Cand. Tech.Sci., Docent
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel.: +38 (098) 859-88-98, e-mail: besitzer@i.ua
ORCID ID: 0000-0001-7834-2797

Dmytro Hlavchev, master
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel: +380993049807, e-mail: dmitriyglavchev@gmail.com
ORCID ID: 0000-0003-4248-4819

УДК 861.5.015.24

Лінеаризація математичної моделі, яка описує процеси управління рухомим складом, методами диференціальної геометрії / Дмитрієнко В.Д., Заковоротний О.Ю., Мезенцев М.В., Главчев Д.М. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2017. – № 21 (1243). – С. 38 – 53.

Розглядається задача лінеаризації математичної моделі, яка описує процеси управління рухомим складом, з метою отримання зручного інструменту для оптимізації процесів руху об'єкта управління. Задача лінеаризації вирішується за допомогою геометричної теорії управління. При цьому основні аналітичні перетворення автоматизовані за допомогою спеціалізованого програмного забезпечення. Пошук функцій перетворення, що зв'язують змінні лінійної і нелінійної моделей, здійснюється за допомогою нового конструктивного методу розв'язання системи диференціальних рівнянь в частинних похідних. Бібліогр.: 10 назв.

Ключові слова: лінеаризація математичної моделі; рухомий склад; геометрична теорія управління; функції перетворення.

УДК 861.5.015.24

Линеаризация математической модели, которая описывает процессы управления подвижным составом, методами дифференциальной геометрии / Дмитриенко В.Д., Заковоротный А.Ю., Мезенцев Н.В., Главчев Д.М. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2017. – № 21 (1243). – С. 38 – 53.

Рассматривается задача линеаризации математической модели, описывающей процессы управления подвижным составом, с целью получения удобного инструмента для оптимизации процессов движения объекта управления. Задача линеаризации решается с помощью геометрической теории управления. При этом основные аналитические преобразования автоматизированы с помощью специализированного программного обеспечения. Поиск функций преобразования, связывающих переменные линейной и нелинейной моделей, осуществляется новым конструктивным методом решения системы дифференциальных уравнений в частных производных. Библиогр.: 10 назв.

Ключевые слова: линеаризация математической модели; подвижной состав; геометрическая теория управления; функции преобразования.

UDC 861.5.015.24

Linearization of the mathematical model, which describes the processes of control rolling stock, using methods of differential geometry / Dmitrienko V.D., Zakovorotny A.Y., Mezentsev N.V., Hlavchev D.M. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2017. – №. 21 (1243). – P. 38 – 53.

The problem of linearization of the mathematical model, which describes the rolling stock control processes, is considered with the aim of obtaining a convenient tool for optimization of the motion processes of the control object. The problem of linearization by means of a geometric control theory is solved. At the same time, the main analytical transformations with the help of specialized software are automated. The search for transformation functions connecting the variables of the linear and nonlinear models out using a new constructive method for solving the system of partial differential equations is carried. Bibliography: 10 titles.

Keywords: linearization of the mathematical model; rolling stock; geometric control theory; transformation functions.