УДК 004.94; 57-74 **DOI: 10.20998/2411-0558.2017.50.01**

Э.И. ВЕЛИЕВ, д-р физ.-мат. наук, проректор, НТУ "ХПИ"

О СВЕРТКЕ РЯДОВ ШЛЕМИЛЬХА – НОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Рассмотрены ряды Шлемильха (Schlomilch), которые применяются при решении различных задач дифракции волн, при расчете волноводов сложного сечения и т.д. Однако их вычисление весьма трудоемко. Поэтому предлагаются два новых представления рядов Шлемильха по фугкциям Бесселя, которые используют быстросходящиеся ряды по элементарным функциям. В частных случаях получены аналитические представления этих рядов. Также приводится новое представление для функций Бесселя. Табл.: 5. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: ряды Шлемильха; функции Бесселя; аналитические представления.

Постановка проблемы и анализ литературы. В статье рассматривается свёртка рядов Шлемильха (Schlomilch) следующего вида

$$S_{\text{к}}^{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}} J_{\text{k}+\lambda}(n\alpha), \quad \lambda \ge 0, \tag{1}$$

$$V_{\text{k}+\lambda}^{\text{p}+\mu}(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\text{v}}} J_{\text{k}+\lambda}(n\alpha) J_{\text{p}+\mu}(n\alpha), \quad \lambda + \mu \ge 0, \tag{2}$$

где $J_{k+\lambda}(x)$ функция Бесселя, и $\alpha \in [0, \pi]$, λ, μ, v – вещественные параметры. Свёртка этих рядов, либо представления их через элементарные функции представляют большой интерес, поскольку они возникают в различных задачах дифракции волн. В целом, ряды (1) и (2) сходятся достаточно медленно, что усложняет их расчёты с заданной точностью и требует разработки новых представлений рядов Шлемильха с существенно меньшим объемом вычислений.

Особый случай (2) при $\mu = \lambda, v = 2\lambda + 1$ и $\lambda = 0$ был рассмотрен в работах [1 – 3] при исследовании рассеивания плоской волны цилиндрическим экраном. Для таких задач мы имеем $\alpha = \theta$, где θ – геометрический размер экрана. Различные типы рядов (1) и (2) возникают в проблемах, связанных с волноводами сложного сечения [4], в задачах излучения с плоскопараллельного волновода с фланцем [5]. Следует отметить, что только особые случаи рядов (1) и (2) при $k = p = 0, v = \lambda + \mu$, приводятся в справочнике [6]. Отдельные аспекты свертки ряда (1) также были рассмотрены в работах [12, 13].

Цель статьи – получение для этих рядов альтернативного представления в явном виде или в терминах более элементарных функций. Кроме того, получить новое представление для функций Бесселя, которое выглядит следующим образом:

$$\frac{J_{k+\lambda}(m\alpha)}{m^{\lambda}}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}J_{k+\lambda}(n\alpha)\frac{\sin\alpha(m-n)}{m-n},\quad \lambda>0. \tag{3}$$

Представления рядов в аналитической форме. В этом разделе даётся альтернативные представления в аналитической форме для рядов (1), (2) и устанавливается справедливость соотношения (3).

Во-первых, покажем справедливость соотношения (3). Учитывая, что ряд в правой части равномерно сходится, то можно переписать его следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}J_{k+\lambda}(n\alpha)\frac{\sin\alpha(m-n)}{m-n}=\frac{\alpha}{2\pi}\int_{-1}^{1}e^{i\alpha m\eta}\Phi_k(\eta,\alpha)d\eta, \tag{4}$$

где

$$\Phi_k(\eta,\alpha)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}J_{k+\lambda}(n\alpha)e^{-i\alpha n\eta}. \tag{5}$$

Принимая во внимание [7], имеет место

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_{\nu}(\epsilon x)}{x^{\mu}}\frac{\sin[\epsilon(x-y)]}{x-y}dx=\frac{J_{\nu}(\epsilon y)}{y^{\mu}} \tag{6}$$

для $0\le\mu\le\nu,\ \nu=0,1,2,\ldots,$ ϵ – реальный параметр. Теперь предположим, что (6) действителен для любого μ и ν так, что $0<\mu<\nu$. Затем, заменяя

$$\nu=k+\lambda,\ \mu=\lambda,\ y=n \tag{7}$$

и подставляя (6) в (5), получим

$$\Phi_k(\eta,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_{k+\lambda(\alpha x)}}{x^{\lambda}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha n\eta}\frac{\sin\alpha(x-n)}{x-n}dx. \tag{8}$$

Принимая во внимание, что ряд в (8) может быть представлен как

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha n\eta}\frac{\sin\alpha(x-n)}{x-n}=\pi e^{-i\alpha x\eta},\quad |\eta|<1, \tag{9}$$

тогда соотношение (8) приобретает вид:

$$\Phi_k(\eta,\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_{k+\lambda(\alpha x)}}{x^{\lambda}}e^{-i\alpha x\eta}dx\,. \qquad (10)$$

Теперь, подставляя (10) в (4) и интегрируя результат по переменной η в пределах (–1, 1), приходим

$$\frac{1}{n}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}J_{k+\lambda}(n\alpha)\frac{\sin\alpha(m-n)}{m-n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_{k+\lambda(x\alpha)}}{x^{\lambda}}\frac{\sin\alpha(x-m)}{x-m}dx. \qquad (11)$$

Наконец, сопоставляя (6) и (11) приходим к выводу, что имеет место представление (3). Следует отметить, что соотношение (3) в точности аналогично интегральному представлению (6). Равенство (3) было проверено численно (см. табл. 1). что показывает полную справедливость данного соотношения.

Таблица 1

Значения усечённого ряда (3) при различных значениях параметра усечения

		$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-NN}^{NN}\frac{1}{n^{\lambda}}J_{k+\lambda}(n\alpha)\frac{\sin\alpha(m-n)}{m-n}$				
α= π/2= =1.570796	$\frac{J_{k+\lambda}(m\alpha)}{m^{\lambda}}$	NN=5	NN=10	NN=50	NN=100	NN=500
k=1, λ=1, m=1	2.497016E-01	2.40081lE-01	2.469212E-01	2.494357E-01	2.496069E-01	2.49693E-01
k=3, λ=1, m=1	1.399604E -02	2.573342E-02	1.721381E-02	1.427329E-02	1.409291E-02	1.4005E-02
k=5, λ=1, m=1	2.983476E -04	-8.549538E-03	-3.266610E-03	3.746473E-06	1.981240E-04	2.8971E-04
k=1, λ=1, m=5	-3.009402E-02	-5.012642E-02	-3.314727E-02	-3.03610E-02	-3.01888E-02	-3.0103E-02
k=3, λ=1, m=5	-1.389344E-02	1.079264E-02	-1.034994E-02	-1.36151E-02	-1.37965E-02	-1.388487E-02
k=5, λ=1, m=5	6.918731E-02	5.379513E-02	6.526445E-02	6.889150E-02	6.908698E-02	6.9178E-02

Свёртка ряда Шлемильха. Прежде чем заняться свёрткой ряда (1), рассмотрим следующий ряд

$$S_{\lambda}^{\prime k}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}J_{k+\lambda}(n\alpha). \qquad (12)$$

Используя интегральное представление для функции Бесселя [8]

$$\frac{J_{k+\lambda}(n\alpha)}{(n\alpha)^{\lambda}} = \alpha_k^{\lambda} \int_{-1}^{1} e^{in\alpha\eta} (1-\eta^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} C_k^{\lambda}(\eta) d\eta, \tag{13}$$

где $\mathrm{Re}(\lambda) > -0{,}5$, $C_k^{\lambda}(\eta)$ – полиномы Гегенбауэра и

$$\alpha_k^{\lambda} = \frac{(-i)^k}{2^{\lambda}} \frac{\Gamma(2\lambda)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(k+2\lambda)}, \tag{14}$$

где $\Gamma(x)$ является Гамма-функцией, соотношение (12) можно переписать как

$$S_k'^{\lambda} = \alpha^{\lambda} a_k^{\lambda} \int_{-1}^{1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha\eta} (1-\eta^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} C_k^{\lambda}(\eta) d\eta. \tag{15}$$

В (15) был использован тот факт, что ряд в формуле (12) равномерно сходится. Если в (15) заменим сумму на

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha\eta} = \frac{2\pi}{\alpha} \delta(\eta), \tag{16}$$

где $\delta(\eta)$ – дельта-функция Дирака, то получим следующую формулу

$$S_k'^{\lambda} = \alpha^{\lambda} a_k^{\lambda} \frac{2\pi}{\alpha} C_k^{\lambda}(0), \tag{17}$$

где для полиномов Гегенбауэра $C_k^{\lambda}(0)$ имеет место [9, стр. 777]

$$C_k^{\lambda}(0) = \begin{cases} 0, \; k = 2m+1, \\ \dfrac{(-1)^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2}+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\frac{k}{2}+\lambda)}, \; k = 2m. \end{cases} \tag{18}$$

Теперь подставляя (18) в (17), и упрощая результат, получаем

$$S_k'^{\lambda} = (\frac{\alpha}{2})^{\lambda-1} \frac{\left[1+(-1)^k\right] \Gamma(\frac{k+1}{2})}{2\Gamma(\frac{k+1}{2}+\lambda)}. \tag{19}$$

Легко показать, что

$$S_k'^{\lambda} = (\frac{\alpha}{2})^{\lambda} \frac{\delta_{k,0}}{\Gamma(\lambda+1)} + \left[1+(-1)^k\right] S_k^{\lambda}, \quad k \ge 0, \tag{20}$$

где $\delta_{k,0} = 1$, если $k = 0$ и $\delta_{k,0} = 0$, если $k \ne 0$. Используя (19) и (20), получаем

$$S_k^{\lambda} = (\frac{\alpha}{2})^{\lambda-1} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{2\Gamma(\frac{k+1}{2}+\lambda)} - (\frac{\alpha}{2})^{\lambda} \frac{\delta_{k,0}}{2\Gamma(\lambda+1)}, \quad \lambda \ge 0. \tag{21}$$

При этом в отличие от ряда (1) соотношение (21) дает точный результат.

Итак, свёртка ряда Шлемильха (1) имеет вид (21). Необходимо подчеркнуть, что в справочной литературе [6, стр. 678] имеется только частный случай свёртки ряда (1) и (21), когда λ целое число. Очевидно, что представление (21) с точки зрения вычислительной эффективности превосходит ряд (1). В качестве примера в табл. 2 приведены результаты расчётов S_k^{λ} для различных значений λ, α и N, где N указывает количество членов в ряде (1). Значения S_k^{λ} в последнем столбце табл. 2, получены с помощью (21). Из табл. 2 видно значительное сокращение времени вычислений при использовании представления (21).

Некоторые частные случаи для ряда (1). Ниже приведены некоторые примеры особых случаев ряда (1).

Случай 1: $\lambda = 0$

$$S_k^0 = \sum_{n=1}^{\infty} J_k(n\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \frac{\delta_{k,0}}{2}. \tag{22}$$

Случай 2: $\lambda = 1$

$$S_k^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_{k+1}(n\alpha) = \frac{1}{k+1} - \frac{\alpha}{4}\delta_{k,0}. \tag{23}$$

Случай 3: $\lambda = 2$

$$S_k^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} J_{k+2}(n\alpha) = \frac{\alpha}{(k+3)(k+1)} - \frac{\alpha^2}{16}\delta_{k,0}. \tag{24}$$

Случай 4: $k = 0$

$$S_0^{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}} J_{\lambda}(n\alpha) = (\frac{\alpha}{2})^{\lambda-1} \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} - (\frac{\alpha}{2})^{\lambda} \frac{1}{2\Gamma(\lambda+1)} . \quad (25)$$

Таблица 2

Сравнение формул (1) и (21) для различных значений λ и α по времени вычислений

	Уравнение (1), $\lambda = 0.6$, $\alpha = 0.1$			Уравненние (21)
k	N			Точно
	100	200	500	
0	3.140474	2.954448	2.969827	2.994830
1	1.926517	1.790110	1.864076	1 854727
2	1.276188	1.433947	1.429102	1.403439
3	1 018130	1 232059	1.152026	1.159204
4	1.037893	0.997560	0.975689	1.002457
5	1.079373	0.814917	0.894016	0.891696
Время расчёта (с)	1.20	3.57	15.71	0.000000
	Уравнение (1), $\lambda = 0.9$, $\alpha = 0.2$			Уравнение (21)
k	N			Точно.
	100	200	500	
0	1.180201	1.192931	1.191302	1.192006
1	0.645554	0.648681	0.655206	0.654486
2	0.459430	0.447669	0.449853	0.449091
3	0.355926	0.349517	0.343222	0.344467
4	0.274589	0.283094	0.279823	0.280682
5	0.222861	0.233091	0.238744	0.237563
Время расчёта (с)	1.70	5.49	20.10	0.001000

Если принят во внимание тот факт, что [9, стр. 257]

$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)}_{x\to\infty} \sim x^{a-b}, \quad (26)$$

где ~ – знак подобия,

тогда асимптотическое поведение S_k^{λ} при $k \to \infty$ будет иметь вид

$$S_{kk\to\infty}^{\lambda} \sim k^{-\lambda}. \quad (27)$$

Заметим, что альтернативное представление S_k^{λ} только при $\lambda = 0$ для (22) дано в работе Twersky [10].

Аналитическое представление для ряда (2). В этом разделе для свёртки ряда (2) предварительно рассмотрим ряд вида

$$\widetilde{V}_{k+\lambda}^{P+\mu}(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^{v}} J_{k+\lambda}(n\alpha) J_{p+\mu}(n\alpha)\,, \tag{28}$$

где полагаем, что

$$v = \lambda + \mu\,. \tag{29}$$

Воспользуемся интегральным представлением для функций Бесселя [8, стр. 150], вида

$$J_{k+\lambda}(n\alpha) J_{p+\mu}(n\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{k+p+\lambda+\mu}(2n\alpha\cos\theta)\cos(k-p+\lambda-\mu)\theta d\theta, \tag{30}$$

где $\mathrm{Re}(\lambda+\mu+k+p) > -1.$ Теперь подставляя (29) и (30) в (28), получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_{k+\lambda}^{P+\mu}(\lambda+\mu) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_{k+p+\lambda+\mu}(2n\alpha\cos\theta)}{n^{\lambda+\mu}} \cos(k-p+\lambda-\mu)\theta d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} S_{k+p}'^{\lambda+\mu} \cos(k-p+\lambda-\mu)\theta d\theta,\end{aligned} \tag{31}$$

где, как было показано ранее (см. (19)),

$$\begin{aligned}S_{k+p}'^{\lambda+\mu} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda+\mu}} J_{k+p+\lambda+\mu}(2n\alpha\cos\theta) = \\ &= [1+(-1)^{k+p}](\alpha\cos\theta)^{\lambda+\mu-1} \frac{\Gamma(\frac{k+p+1}{2})}{2\Gamma(\frac{k+p+1}{2}+\lambda+\mu)}.\end{aligned} \tag{32}$$

Теперь, подставляя (32) в (31), получим следующее представление

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_{k+\lambda}^{P+\mu}(\lambda+\mu) &= \frac{\alpha^{\lambda+\mu-1}\Gamma(\frac{k+p+1}{2})}{\pi\Gamma(\frac{k+p+1}{2}+\lambda+\mu)} \times \\ &\times [1+(-1)^{k+p}]\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\lambda+\mu-1}\theta \cos(k-p+\lambda-\mu)\theta d\theta\,.\end{aligned} \tag{33}$$

Интеграл в правой части (33) может быть записан ([11, стр. 372]) как

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\lambda+\mu-1}\theta\cos(k-p+\lambda-\mu)\theta d\theta =$$
$$= \frac{\pi\Gamma(\lambda+\mu)}{2^{\lambda+\mu}\,\Gamma(\frac{k-p+1}{2}+\lambda)\ \Gamma(\frac{p-k+1}{2}+\mu)}, \quad \lambda+\mu>0. \tag{34}$$

Теперь, подставляя (34) в (33), получаем

$$\widetilde{V}_{k+\lambda}^{P+\mu}(\lambda+\mu) = (\frac{\alpha}{2})^{\lambda+\mu-1} \times$$
$$\times \frac{[1+(-1)^{k+p}]\Gamma(\lambda+\mu)\Gamma(\frac{k+p+1}{2})}{2\Gamma(\frac{k+p+1}{2}+\lambda+\mu)\Gamma(\frac{k-p+1}{2}+\lambda)\Gamma(\frac{p-k+1}{2}+\mu)}, \ \lambda+\mu>0. \tag{35}$$

Легко показать, что

$$\widetilde{V}_{k+\lambda}^{P+\mu}(\lambda+\mu) = (\frac{\alpha}{2})^{\lambda+\mu}\frac{\delta_{k,0}\delta_{p,0}}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)} + [1+(-1)^{k+p}]\,V_{k+\lambda}^{P+\mu}(\lambda+\mu). \tag{36}$$

Таким образом, имеем

$$V_{k+\lambda}^{P+\mu}(\lambda+\mu) = (\frac{\alpha}{2})^{\lambda+\mu-1} \times$$
$$\times \frac{\Gamma(\lambda+\mu)\Gamma(\frac{k+p+1}{2})}{2\Gamma(\frac{k+p+1}{2}+\lambda+\mu)\Gamma(\frac{k-p+1}{2}+\lambda)\Gamma(\frac{p-k+1}{2}+\mu)} - \tag{37}$$
$$-(\frac{\alpha}{2})^{\lambda+\mu}\frac{\delta_{k,0}\delta_{p,0}}{2\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\mu+1)}.$$

Только частный случай представления (37), когда $k = p = 0$ можно найти в справочнике [6, стр. 683]. Следует отметить, что полученные результаты (21) и (37) для свёртки рядов Шлемильха (1) и (2), являются аналогами известных, так называемых, разрывных интегралов Вебера – Шафхейтлина (Weber-Schafheitlin) для функции Бесселя [8, стр. 403; 6, стр. 211]. Как известно, эти интегралы имеют вид [6, стр. 174, 211]

$$\int_0^{\infty}\frac{J_{k+\lambda}(\alpha x)}{x^{\lambda}}dx = (\frac{\alpha}{2})^{\lambda-1}\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{2\Gamma(\frac{k+1}{2}+\lambda)}, \tag{38}$$

$$\int_0^\infty \frac{J_{k+\lambda}(\alpha x)J_{p+\mu}(\alpha x)}{x^{\lambda+\mu}}dx = (\frac{\alpha}{2})^{\lambda+\mu-1} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\frac{k+p+1}{2})\Gamma(\lambda+\mu)}{2\Gamma(\frac{k+p+1}{2}+\lambda+\mu)\Gamma(\frac{k-p+1}{2}+\lambda)\Gamma(\frac{p-k+1}{2}+\mu)}, \tag{39}$$

где $\mathrm{Re}(\lambda+\mu)>0$. Сравнение представлений (21) и (37) с соответствующими представлениями (38) и (39) показывает, что полученные нами результаты свёртки рядов Шлемильха (1) и (2) являются аналогами интегральных представлений для функций Бесселя (38) и (39). Используя (26) и (27), можно показать, что имеет место следующие асимптотические пределы для $V_{k+\lambda}^{P+\mu}(\lambda+\mu)$:

$$V_{k+\lambda}^{k+\mu}(\lambda+\mu)_{k\to\infty} \sim k^{-(\lambda+\mu)},$$

$$V_{k+\lambda}^{p+\mu}(\lambda+\mu)_{k\to\infty} \sim k^{-2(\lambda+\mu)}, \tag{40}$$

$$V_{k+\lambda}^{p+\mu}(\lambda+\mu)_{p\to\infty} \sim p^{-2(\lambda+\mu)}.$$

Ниже приведены некоторые важные частные случаи для $V_{k+\lambda}^{P+\mu}(\lambda+\mu)$.

Случай 1: $\lambda=0$, $\mu=1$

$$V_k^{P+1}(1) = \frac{2\cos\pi(\frac{k-p}{2})}{\pi(k+p+1)(p-k+1)} - \frac{\alpha}{4}\delta_{k,0}\delta_{p,0}. \tag{41}$$

Случай 2: $\lambda=1$, $\mu=0$

$$V_{k+1}^{P}(1) = \frac{2\cos\pi(\frac{k-p}{2})}{\pi(k+p+1)(k-p+1)} - \frac{\alpha}{4}\delta_{k,0}\delta_{p,0}. \tag{42}$$

Случай 3: $\lambda=\mu=1$

$$V_{k+1}^{P+1}(2) = \frac{4\alpha\cos\pi(\frac{k-p}{2})}{\pi(k+p+3)(k+p+1)\,[1-(k-p)^2]} - \frac{\alpha^2}{8}\delta_{k,0}\delta_{p,0}. \tag{43}$$

При выводе этих представлений был использован тот факт, что ([9, стр. 256])

$$\Gamma(\frac{1}{2}-x)\ \Gamma(\frac{1}{2}+x)=\frac{\pi}{\cos\pi x}\,. \qquad (44)$$

Вычислительная эффективность полученных соотношений проверялось путём расчётов ряда (2) и представления (37). Эти результаты приведены в табл. 3 и 4 для различных значений параметров α, λ и μ Время расчёта дано для всех матриц $(k^* p)$, рассчитанных при различных N (N – количество членов в ряде**)**. Как видно из табл. 3 и 4, уравнение (37) значительно уменьшает время вычисления. Следовательно, эффективность представления (37) не вызывает сомнений.

Представление ряда (2) через элементарные функции. В этом разделе для ряда (2) будет получено новое представление когда

$$v=\lambda+\mu+1\,. \qquad (45)$$

Далее будем предполагать, что в (2)

$$k+p = \text{четное и положительное.} \qquad (46)$$

Условия (45) и (46) справедливы, и возникают в различных проблемах дифракции [1 – 5]. Альтернативный вывод для (2) при $\mu=\lambda$ и $\nu=2\lambda+1$ приводится в [4]. Ниже приводимый результат носит более общий характер. Далее снова будет использовано интегральное представление (30) для функции Бесселя, а также первое интегральное представление Сонина (Sonine) [8, стр. 373] для них вида

$$\begin{gathered} J_{k+p+\mu+\lambda}(2n\alpha\cos\theta)= \\ =\frac{(2n\alpha\cos\theta)^{\lambda+\mu}}{2^{\lambda+\mu-1}\Gamma(\lambda+\mu)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{k+p}(2n\alpha\cos\theta\sin\phi)\times \\ \times\sin^{k+p+1}\phi\cos^{2\lambda+2\mu-1}\phi d\phi, \quad \mathrm{Re}(\lambda+\mu)>0. \end{gathered} \qquad (47)$$

Как было отмечено выше, полагаем что $k+p=$чётно. Тогда примем во внимание следующее интегральное представление для $J_{k+p}(x)$ [8, стр. 21]

$$J_{k+p}(x)=\int_0^{\pi}\cos(x\sin\phi)\cos(k+p)\phi d\phi\,. \qquad (48)$$

Таблица 3

Сравнение формул (2) и (37) по времени расчетов для
$\alpha = 0.1,\ \mu = 0.6,\ \lambda = 0.7$

		Уравнение (2) при $\alpha = 0.1$, $\mu = 0.6$, $\lambda = 0.7$							Время расчёта (с)
						p			
		k	0	1	2	3	4	5	
N	100	0	0.379159	0.133901	0.026231	-0.008133	-0.008931	-0.001942	14.34
		1	0.116451	0.104794	0.056893	0.015904	-0.002970	-0.005622	
		2	0.015679	0.050277	0.052687	0.033597	0.012731	0.000286	
		3	-0.010599	0.010575	0.030207	0.033160	0.022858	0.009900	
		4	-0.007793	-0.004936	0.009551	0.020941	0.021904	0.015553	
		5	-0.000576	-0.005413	-0.001274	0.007906	0.014430	0.015198	
	200	0	0.382911	0.134441	0.022590	-0.010143	-0.006390	0.001885	42.85
		1	0.115922	0.108161	0.058211	0.013087	-0.005731	-0.004750	
		2	0.011772	0.050576	0.056688	0.034926	0.009471	-0.003386	
		3	-0.011711	0.007365	0.030579	0.036533	0.024243	0.007447	
		4	-0.004522	-0.006944	0.005781	0.021419	0.025903	0.017927	
		5	0.002923	-0.003667	-0.004412	0.004833	0.015959	0.019512	
	500	0	0.384707	0.134810	0.020837	-0.010841	-0.004825	0.003096	186.97
		1	0.115764	0.109794	0.058553	0.011516	-0.006467	-0.003423	
		2	0.009958	0.050401	0.058481	0.035437	0.007816	-0.004442	
		3	-0.011906	0.005697	0.030587	0.038207	0.024659	0.005904	
		4	-0.002770	-0.007202	0.003997	0.021344	0.027665	0.018582	
		5	0.003709	-0.002091	-0.005022	0.003130	0.016135	0.021289	
		Уравнение (37) при $\alpha = 0.1$, $\mu = 0.6$, $\lambda = 0.7$							
		0	0.385447	0.134996	0.020100	-0.011005	-0.004102	0.003335	0.055
		1	0.115711	0.110551	0.058694	0.010768	-0.006670	-0.002699	
		2	0.009213	0.050309	0.059224	0.035572	0.007084	-0.004653	
		3	-0.011837	0.004935	0.030490	0.038963	0.024818	0.005166	
		4	-0.002019	-0.007174	0.003247	0.021272	0.028410	0.018730	
		5	0.003720	-0.001328	-0.005005	0.002368	0.016055	0.022043	

Таблица 4

Сравнение формул (2) и (37) для $\alpha = 0.2$, $\mu = 0.7$, $\lambda = 0.5$ по времени вычислений

		Уравнение (2) при α =0.2, μ = 0.7, λ = 0.5							Время расчёта (с)
						p			
		k	0	1	2	3	4	5	
N	100	0	0.571088	0.164204	0.005243	-0.022386	-0.005287	0.006767	21.53
		1	0.226266	0.176111	0.075591	0.005092	-0.014017	-0.005125	
		2	0.041172	0.102139	0.095424	0.047349	0.005277	-0.009345	
		3	-0.018259	0.024767	0.062824	0.062951	0.034231	0.005264	
		4	-0.012483	-0.010390	0.018282	0.044460	0.045520	0.026094	
		5	0.003180	-0.009417	-0.006039	0.014648	0.033321	0.034744	
	200	0	0.574070	0.163516	0.002177	-0.022326	-0.002222	0.007797	67.30
		1	0.227356	0.178782	0.074837	0.002263	-0.014046	-0.002305	
		2	0.038316	0.103126	0.098403	0.046972	0.002209	-0.010058	
		3	-0.019892	0.022277	0.064142	0.065719	0.033680	0.002291	
		4	-0.010072	-0.012024	0.015664	0.045563	0.048436	0.026021	
		5	0.005627	-0.007475	-0.008243	0.012241	0.034857	0.037717	
	500	0	0.575494	0.163087	0.000727	-0.022035	-0.000736	0.007750	234.34
		1	0.227861	0.180267	0.074424	0.000739	-0.013834	-0.000748	
		2	0.036919	0.103634	0.099831	0.046599	0.000733	-0.009928	
		3	-0.020519	0.020836	0.064681	0.067211	0.033339	0.000744	
		4	-0.008754	-0.012712	0.014303	0.046123	0.049871	0.025697	
		5	0.006460	-0.006147	-0.008995	0.010840	0.035424	0.039213	
Уравнение (37) при α =0.2, μ = 0.7, λ = 0.5									
		0	0.576217	0.163238	0.000000	-0.021823	0.000000	0.007578	0.055
		1	0.228534	0.180998	0.074199	0.000000	-0.013640	0.000000	
		2	0.036200	0.103879	0.100555	0.046375	0.000000	-0.009743	
		3	-0.020776	0.020111	0.064924	0.067942	0.033125	0.000000	
		4	-0.008044	-0.012985	0.013588	0.046375	0.050595	0.025481	
		5	0.006752	-0.005435	-0.009275	0.010119	0.035673	0.039944	

Подставляя (48) в (47), а после (47) в (30), получим

$$J_{k+\lambda}(n\alpha)J_{p+\mu}(n\alpha) =$$
$$= \frac{4}{\pi^2}\frac{(n\alpha)^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda+\mu)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi}\cos(k-p+\lambda-\mu)\theta\cos^{\lambda+\mu}\theta\times \quad (49)$$
$$\times\left\{\sin^{k+p+1}\phi\cos^{2\lambda+2\mu-1}\phi\begin{bmatrix}\cos(2n\alpha\cos\theta\sin\phi\sin\psi)\\ \cos(k+p)\psi\end{bmatrix}\right\}d\theta d\phi d\psi.$$

Подставляя интегральное представление (49) в (2) при $v = \lambda+\mu+1$, получим

$$V_{k+\lambda}^{p+\mu}(\lambda+\mu+1) =$$
$$= \frac{4}{\pi^2}\frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda+\mu)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\lambda}{2}}\int_0^{\pi}\cos(k+p+\lambda-\mu)\theta\cos^{\lambda+\mu}\theta\times \quad (50)$$
$$\times\{\sin^{k+p+1}\phi\cos^{2\lambda+2\mu-1}\phi\cos(k+p)\psi\ln 2\sin(\alpha\cos\theta\sin\phi\sin\psi)\}\times$$
$$\times d\theta d\phi d\psi.$$

При выводе (50), был использован тот факт, что ([11, стр. 381])

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos(2n\alpha\cos\theta\sin\phi\sin\psi) = -\ln 2\sin(\alpha\cos\theta\sin\phi\sin\psi). \quad (51)$$

Используя представление для функции $\ln(2\sin x)$ в виде ([11, стр. 46])

$$\ln(2\sin x) = \ln 2x - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\varsigma(2s)}{s}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2s}, \quad (52)$$

где $\varsigma(2s)$ это Зета функция Римана (Riemann Zeta) функция [9, стр. 807], тогда $V_{k+\lambda}^{p+\mu}(\lambda+\mu+1)$ может быть представлено следующим образом:

$$V_{k+\lambda}^{p+\mu}(\lambda+\mu+1) = Q_{kp}^{(1)} + Q_{kp}^{(2)}, \quad (53)$$

где

$$Q_{kp}^{(1)} = -\frac{4}{\pi^2}\frac{\alpha^{\mu+\lambda}}{\Gamma(\lambda+\mu)}\times \quad (54)$$
$$\times[A_0^+B_0^+C_0^+\ln(2\alpha) + C_0^+B_0^+A_0^- + C_0^+A_0^+B_0^- + A_0^+B_0^+C_0^-],$$

$$Q_{kp}^{(2)}=\frac{4}{\pi^2}\frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\pi^2\Gamma(\lambda+\mu)}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\varsigma(2s)}{s}(\frac{\alpha}{\pi})^{2s}A_{2s}^{+}B_{2s}^{+}C_{2s}^{+} \qquad (55)$$

с

$$A_s^{\pm}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{{}^{1}_{\ln\cos\theta}\}\cos(k-p+\lambda-\mu)\theta\cos^{\lambda+\mu+s}\theta d\theta, \qquad (56)$$

$$B_s^{\pm}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{{}^{1}_{\ln\sin\varphi}\}\sin^{(s+k+p+1)}\varphi\cos^{2\lambda+2\mu-1}\varphi d\varphi, \qquad (57)$$

$$C_s^{\pm}=\int_0^{\pi}\{{}^{1}_{\ln\sin\psi}\}\cos(k+p)\psi\sin^{s}\psi d\psi. \qquad (58)$$

Интегралы в (56) – (58) являются табличными интегралами ([11]) и могут быть вычислены в аналитическом виде (см. приложение). Как результат, получаем

$$Q_{kp}^{(1)}=\frac{Q_{kp}^{\lambda\mu}(0)}{k+p}=$$

$$=(\frac{\alpha}{2})^{\lambda+\mu}\frac{\Gamma(\lambda+\mu+1)\Gamma(\frac{k+p}{2})}{2\Gamma(\frac{k-p}{2}+\lambda+1)\Gamma(\frac{p-k}{2}+\mu+1)\Gamma(\frac{k+p}{2}+\lambda+\mu+1)}. \qquad (59)$$

При $k+p>0$ имеем

$$Q_{kp}^{(2)}=\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}(\frac{\alpha}{2\pi})^{2s}\frac{\varsigma(2s)}{s}Q_{kp}^{\mu\lambda}(s)C_{2s}^{+}, \qquad (60)$$

где

$$Q_{kp}^{\lambda\mu}(s)=(\frac{\alpha}{2})^{\lambda+\mu}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(2s+\lambda+\mu+1)\Gamma(s+1+\frac{k+p}{2})}{\Gamma(\frac{k-p}{2}+\lambda+s+1)\Gamma(\frac{p-k}{2}+\mu+s+1)\Gamma(\frac{k+p}{2}+\lambda+\mu+s+1)}. \qquad (61)$$

В табл. 5 приведены результаты вычислений уравнения (60) при различных значениях α.

Выражение для C_{2s}^{+} представлено в приложении (А.3). Используя (26) и (44) можно получить следующие асимптотические пределы для $V_{k+\lambda}^{\mu+1}(\lambda+\mu+1)$:

$$V_{k+\lambda}^{p+\mu}(\lambda+\mu+1)_{k\to\infty} \sim Q_{kk\;k\to\infty}^{(1)} \sim k^{-\lambda-\mu-1},$$

$$V_{k+\lambda}^{p+\mu}(\lambda+\mu+1)_{k\to\infty} \sim Q_{kp}^{(1)} \sim k^{-2(\lambda+\mu)-2}, \tag{62}$$

$$V_{k+\lambda}^{p+\mu}(\lambda+\mu+1)_{p\to\infty} \sim Q_{kp}^{(1)} \sim p^{-2(\lambda+\mu)-2}.$$

Таблица 5

Значения уравнения (60) при различных значениях α

Уравнение (60), при $\lambda=\mu=1/2$, $\alpha=\pi/2$						
	p					
k	0	1	2	3	4	5
0	$1.75\cdot10^{-4}$	0	$2.14\cdot10^{-4}$	0	$-3.97\cdot10^{-6}$	0
1	0	$3.13\cdot10^{-4}$	0	$-9.04\cdot10^{-6}$	0	$2.4\cdot10^{-7}$
2	$2.14\cdot10^{-4}$	0	$1.17\cdot10^{-5}$	0	$4.47\cdot10^{-7}$	0
3	0	$-9.04\cdot10^{-6}$	0	$5.47\cdot10^{-7}$	0	$-2.38\cdot10^{-7}$
4	$3.97\cdot10^{-6}$	0	$4.47\cdot10^{-7}$	0	$2.81\cdot10^{-8}$	0
5	0	$2.4\ 10^{-7}$	0	$2.38\cdot10^{-8}$	0	$1.53\cdot10^{-9}$
Уравнение (60), при $\lambda=\mu=1/2$, $\alpha=\pi/10$						
0	$-6.5\cdot10^{-4}$	0	$2.7\cdot10^{-7}$	0	$-1.6\cdot10^{-8}$	0
1	0	$4.0\cdot10^{-7}$	0	$4.0\cdot10^{-10}$	0	$3.4\cdot10^{-13}$
2	$2.7\cdot10^{-7}$	0	$5.3\cdot10^{-10}$	0	$6.9\cdot10^{-13}$	0
3	0	$4.0\cdot10^{-10}$	0	$8.6\cdot10^{-13}$	0	$1.3\cdot10^{-15}$
4	$-1.6\cdot10^{-8}$	0	$6.9\cdot10^{-13}$	0	$-1.5\cdot10^{-15}$	0
5	0	$3.4\cdot10^{-13}$	0	$1.3\cdot10^{-13}$	0	$3.0\cdot10^{-18}$

Таким же образом, для $V_{k+\lambda}^{p+\mu}(\lambda+\mu+1)$ при $k=p=0$, $\lambda=\mu$ можно найти представление:

$$V_{\lambda}^{\mu}|_{\lambda=\mu} = V_{\lambda}^{\lambda}(2\lambda+1) = Q_{00}^{(1)} + Q_{00}^{(2)}, \tag{63}$$

где

$$Q_{00}^{(1)} = -\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2\lambda} \frac{1}{2\Gamma^{2}(\lambda+1)} \times \\ \times\{2\ln\alpha + \psi(\lambda+\frac{1}{2}) - \psi(\lambda+1) + \psi(1) - \psi(2\lambda+1)\}, \tag{64}$$

$$Q_{00}^{(2)} = \frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}(\frac{\alpha}{2\pi})^{2s}\frac{\varsigma(2s)}{s}Q_{00}^{\lambda\lambda}(s)C_{2s}^{+} \mid_{k=p=0} . \qquad (65)$$

$\psi(x)$ – это *psi* функция. Очень важно отметить, что, как показали численные расчёты, когда $\alpha \le \frac{\pi}{2}$, то для $V_{k+\lambda}^{p+\mu}(\lambda+\mu+1)$ имеет место

$$V_{k+\lambda}^{p+\mu}(\lambda+\mu+1) = Q_{kp}^{(1)} + O(10^{-4}) . \qquad (66)$$

Это означает, что величины $Q_{kp}^{(2)}$ имеют порядок $Q_{kp}^{(2)} = O(10^{-4})$. Таким образом, в этом случае можно сказать, что аналитическое представление для $V_{k+\lambda}^{p+\mu}(\lambda+\mu+1)$ имеет вид (66). Численные эксперименты показали, что ряд в формуле (60) имеет очень быструю сходимость для всех значений параметра $\alpha \le \pi$. Ниже приведены некоторые важные частные случаи, которые представляют интерес при решении различных задач дифракции:

Случай 1: $\lambda = \mu = 0$

$$Q_{kp}^{(1)} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\pi\frac{k-p}{2}}{k^2-p^2}\frac{1}{(\frac{p-k}{2}+1)(\frac{p+k}{2}+1)} = \begin{cases} \frac{1}{2k}, k = p, \\ 0, k \ne p, k+p = even, \end{cases} \qquad (67)$$

$$Q_{00}^{(1)} = -\ln(\frac{\alpha}{2}) . \qquad (68)$$

Случай 2: $\lambda = 0, \mu = 1$

$$Q_{kp}^{(1)} = \alpha\frac{\sin\pi\frac{k-p}{2}}{k^2-p^2}\frac{1}{(\frac{p-k}{2}+1)(\frac{p+k}{2}+1)} = \begin{cases} \frac{\alpha}{4k(k+1)}, k = p, \\ 0, k \ne p, k+p = even. \end{cases} \qquad (69)$$

Выводы. В статье показано, что ряды Шлемильха (Schlomilch) по функциям Бесселя тип (1) и (2) могут быть представлены в аналитической форме либо в виде рядов по элементарным функциям. Для наглядности, различные частные случаи (1) и (2), возникающие в различных задачах дифракции представлены отдельно. Полученные результаты интересны с математической точки зрения. Они могут рассматриваться как аналог интегралов Вебера – Шафхейтлина (Weber-Schafheitlina) для бесселевых функций для рядов Шлемильха (Schlomilch) (1) и (2). Следует особо отметить, что в математических справочниках можно найти только частные случаи результатов данной статьи.

Приложение. Анализ $A_s^{\pm}, B_s^{\pm}, C_s^{\pm}$

1. Выражение для $A_s^{\pm}$ имеет вид [11, стр. 372, 587]

$$A_s^{\pm} = \begin{cases} \dfrac{\pi \Gamma(s+\lambda+\mu+1)}{2^{s+\lambda+\mu+1}\Gamma(\frac{k-p}{2}+\lambda+s+1)\,\Gamma(\frac{p-k}{2}+\mu+s+1)}, k+p \geq 0, \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{4}\dfrac{\Gamma(s+\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(s+\lambda+1)}\left[\Psi(\lambda+s+\frac{1}{2})-(\Psi(s+\lambda+1)\right], \lambda=\mu, k=p=0. \end{cases}$$

Следует отметить, что для любого λ, μ и k, p A_{2s}^{-} должны быть рассчитаны только численно.

2. Для $B_s^{\pm}$ мы имеем [11, стр. 369, 587]

$$B_s^{\pm} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\lambda+\mu)\,\Gamma(\frac{k+p}{2}+s+1)}{2\Gamma(\frac{k+p}{2}+s+\lambda+\mu+1)}, \lambda+\mu>0, k+p>0, \\ \dfrac{1}{4}\dfrac{\Gamma(s+1)\Gamma(\lambda+\mu)}{\Gamma(s+\lambda+\mu+1)}[\Psi(s+1)-\Psi(s+\lambda+\mu+1)], \lambda+\mu>0, k=p=0. \end{cases}$$

3. Для $C_s^{\pm}$ имеем [11, стр. 373, 584, 587]

$$C_{2s}^{\pm} = \begin{cases} \dfrac{\pi(-1)^{\frac{k+p}{2}}\Gamma(2s+1)}{2^{2s}(s+1+\frac{k+p}{2})\Gamma(s+1-\frac{k+p}{2})}, \text{ если } s \geq \dfrac{k+p}{2}, \\ 0, \text{ если } s < \dfrac{k+p}{2}. \end{cases}$$

$$C_0^{+} = \begin{cases} \pi, \text{ при } k=p=0, \\ 0, \text{ при } k+p>0, \end{cases}$$

$$C_0^- = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{k+p}, & k+p = \text{четное и положительное}, \\ -\pi \ln 2, k = p = 0, \end{cases}$$

$$C_{2s}^- = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(s+1)} \left[\Psi(s+\frac{1}{2}) - \Psi(s+1) \right], \quad k = p = 0 .$$

Список литературы: **1**. *Велиев Э.И.* Дифракция волн на пересекающихся круговых цилиндрических телах / *Э.И. Велиев, В.П. Шестопалов* // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 282. – № 5. – С. 1094-1098. **2.** *Вавилов В.Н.* Эффективный метод решения задачи дифракции волн на цилиндрическом экране / *В.Н. Вавилов, Э.И. Велиев, В.В. Веремей, В.П. Шестопалов* // ДАН СССР. – 1990. – №. 313. – С. 585-589. **3**. *Vavilov V.* Electromagnetic wave diffraction by cylindrical bodies with edges / *V.N. Vavilov, E.I. Veliev* // Electromagnetics. – 1993. – Vol. 13. – P. 339-357. **4.** *Гальченко Н.А.* Волноводы сложных сечений / *Н.А. Гальченко, В.С. Михалевский, Г.П. Синявский.* – Ростов-на Дону: Изд-во Ростовского ун-та. – 1978. –176 с. **5.** *Hongo K.* Diffraction by a flanged parallel plate wave guide / *K. Hongo* // Radio Science. – 1972. – Vol. 7. – P. 955-963. **6.** *Прудников А.П.* Интегралы и ряды. Специальные фунции / *А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев.* – М.: Наука. – 1983. – Том 2. – 752 с. **7.** *Хенл Х.* Теория дифракции / *Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль.* – М.: Мир, 1964. – 428 с. **8.** *Ватсон Д.Н.* Теория Бесселевых функций. Т.1. – М.: ИЛ, 1949. – 1000 с. **9.** *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / *М. Абрамовиц, И. Стиган.* – М.: Наука, 1979. – 832 с. **10.** *Twersky V.* Elementry Function Representations of Schlomilch Series / *V. Twersky* // Arch. Rational Mach. Anal. – 1961. – Vol. 8. – P. 323-333. **11.** *Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / *И.С. Градштейн, И.М. Рыжик.* – М.: Наука, 1971. – 1100 с. **12.** *Бондаренко В.Ф.* Об эффективном суммировании рядов Шлемильха цилиндрических функций / *В.Ф. Бондаренко* // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1991. – С. 1081-1085. **13.** *Ляхов Л.Н.* Многочлены Шлемильха. Интерполяционная формула Рисса для в-производной и неравенство Берштейна для дробных в-производных Вейля-Маршо / *Л.Н. Ляхов, Е.Л. Санина* // Доклады академии наук, математика. – 2007. – Т. 417. – № 5. – С. 592-596.

References:

1. Veliev, E.I., and Shestopalov, V.P. (1985). "Diffraction of waves on intersecting circular cylindrical bodies". *Paper presented at the AN SSSR*, Vol 282, Issue 5, 1985, pp.1094 - 1098.

2. Vavilov, V.N., Veliev, E.I.,. Veremey, V.V, and Shestopalov, V.P. (1990*).*"Effective method for solving the problem of wave diffraction on a cylindrical screen". *Paper presented at the AN SSSR*, Vol 313, 1990, pp.585-589.

3. Vavilov, V.N. (1993). "Electromagnetic wave diffraction by cylindrical bodies with edges". *Journal of Electromagnetics*, Vol. 13, 1993, pp 339-357.

4. Galchenko, N.A., Mikhalevsky, V.S, and Sinyavsky, G.P. (1978). *Waveguides of complex sections.* Rostov-on-Don, Publishing house of the Rostov University, Rostov, 176 p.

5. Hongo, K. (1972). "Diffraction by a flanged parallel plate wave guide". *Proceedings of the Radio Science*, Vol 7, pp. 955-963.

6. Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu. A., and Marichev, O.I. (1983). *Integrals and series. Special functions*. Science, Mosscow, 1983, Vol. 2, 752 p.

7. Henl, H., Maue, A, and Westpal, C. (1964). *The theory of diffraction.* Mir, Moscow, 428 p.
8. Watson, D.N. (1949). *Theory of Bessel functions.* Vol. 1, IL, Moscow, 1000 p.
9. Abramovits, M., and Stegan, E. (1979). *Handbook of special functions*. Nauka, Moscow, 1979, 832 p.
10. Twersky, V. (1961). *Elementry Function Representations of Schlomilch Series*. Arch. Rational Mach. Anal., Vol. 8, pp. 323-333.
11. Gradshtein, E.S., and Ryzhik, I.M. (1971). *Tables of integrals, sums, series and products*. Nauka, Moscow, 1100 p.
12. Bondarenko, V.F. (1991). "On the effective summation of the Schlömilch series of cylindrical functions". *Calc. Math. and Math. fiz*., pp. 1081-1085.
13. Lyakhov, L.N., and Sanina, E.L. (2007). "Polynomials of Slamnich". *The Riesz interpolation formula for the s-derivative and the Bernstein inequality for the Weyl-Marchaud fractional s-derivatives.* 2007. *Reports of the Academy of Sciences*, Mathematics, Vol. 417, pp. 592-596.

Статью представил д-р физ-мат. наук, проф. НТУ "ХПИ" Бреславский Д.В.

Поступила (*received*) *10.11.2017*

Eldar Veliyev, Dr. Sci., Professor
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpichova, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel: (057) 707-64-50, e-mail: veliev51@gmail.com, veliev@khpi.kharkov.ua
ORCID ID: 0000-0003-3923-2901

УДК 004.94; 57-74

Про згортку рядів Шлемільха – нові уявлення / Велієв Е.І. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2017. – № 50 (1271). – С. 5 – 24.

Розглянуто ряди Шлемільха (Schlomilch), які застосовуються при вирішенні різних завдань дифракції хвиль, при розрахунку хвилеводів складного перетину і т.д. Однак їх обчислення досить трудомістким. Тому пропонуються два нових подання рядів Шлемільха по фугкціям Бесселя, які використовують бистросходящіеся ряди по елементарних функцій. В окремих випадках отримані аналітичні подання цих рядів. Також наводиться нове уявлення для функцій Бесселя. Табл.: 5. Бібліогр.: 11 назв.

Ключові слова: ряди Шлемільха, функції Бесселя, аналітичні уявлення.

УДК 004.94; 57-74

О свертке рядов Шлемильха – новые представления / Велиев Э.И. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2017. – № 50 (1271). – С. 5 – 24.

Рассмотрены ряды Шлемильха (Schlomilch), которые применяются при решении различных задач дифракции волн, при расчете волноводов сложного сечения и т.д. Однако их вычисление весьма трудоемко. Поэтому предлагаются два новых представления рядов Шлемильха по фугкциям Бесселя, которые используют быстросходящиеся ряды по элементарным функциям. В частных случаях получены аналитические представления этих рядов. Также приводится новое представление для функций Бесселя. Табл.: 5. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: ряды Шлемильха, функции Бесселя, аналитические представления.

UDC 004.94; 57-74

About the rollup of Schlomilch series – new representation / Veliev E.I. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2017. – №. 50 (1271). – P. 5 – 24.

Schlomilch series are considered, which are used in solving various problems of wave diffraction, in the calculation of waveguides of complex cross-section, etc. However, their calculation is very laborious. Therefore, two new representations of the Schlomilch series on Bessel functions are proposed, which use rapidly convergent series over elementary functions. In special cases, analytical representations of these series are obtained. A new presentation is also given for the Bessel functions. Tabl.: 5. Refs.: 11 titles.

Keywords: Schlömilch series, Bessel functions, analytic representations.