

Т.Г. ЭРГАШЕВ, канд.физ.-мат.наук, доц., Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, г. Ташкент, Узбекистан

ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ФУНКЦИЕЙ ГУМБЕРТА В ЯДРЕ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Многие задачи прикладной математики сводятся к решению интегральных уравнений со специальными функциями в ядрах, поэтому формулы обращения таких уравнений играют важную роль при решении различных задач. В работе введена и рассмотрена вырожденная гипергеометрическая функция от двух переменных, через которую выражается решение исследуемого интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Найденная формула обращения применена к нахождению некоторых соотношений между искомым решением и его производной краевой задачи для гиперболического уравнения с двумя линиями вырождения и со спектральным параметром. Библиогр.: 16 назв.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольтерра первого рода; формула обращения; вырожденная гипергеометрическая функция от двух переменных; спектральный параметр.

Постановка проблемы и анализ литературы. Многочисленные приложения теории интегральных уравнений можно найти в теории упругости, в теории пластичности, гидродинамике, в теории массо- и теплопереноса, теории управления, химических технологиях, биомеханике, теории массового обслуживания, экономике и медицине. Часто изучение задач моделирования фильтрации жидкости в пористых средах сводится к рассмотрению интегральных уравнений Вольтера первого рода со специальными функциями в ядрах [1, 2]. Из общей теории известно, что если при решении задач прикладной математики появляется интегральное уравнение Вольтера первого рода, то необходимо найти формулу обращения, выражающую решение интегрального уравнения в явном виде. Подробное изложение теории интегральных уравнений первого рода и библиографию можно найти в [3, 4]. Опуская большой список литературы, в которой изучены различные интегральные уравнения первого рода, отметим работы, наиболее близко примыкающие к настоящему сообщению.

В задаче Коши для гиперболического уравнения с двумя линиями вырождения и со спектральным параметром

$$(-y)^m U_{xx} - x^n U_{yy} + \mu x^n (-y)^m U = 0, \quad x > 0, y < 0, \quad (1)$$

где m, n и μ – действительные числа, при нахождении соотношения между искомым решением и его производной на линии вырождения, т.е. соотношения между $\tau(x) \equiv U(x, 0)$ и $v(x) \equiv U'_y(x, 0)$, приходим к следующему интегральному уравнению:

$$N_{0x}^\lambda[v(x)] \equiv \int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha (x-t)^{-2\beta} \times \\ \times \Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha; 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, \lambda(x-t)^2\right) v(t) dt, \quad (2)$$

где $\Xi_2(a, b; d; u, w) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{m! n! (d)_{m+n}} u^m w^n$ – функция Гумберта, $(a)_k$ – символ Похгаммера: $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1)$, $k = 1, 2, \dots$ а α , β и λ – действительные числа, причем

$$\alpha = \frac{n}{2(n+2)}, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)}, \quad \lambda = \frac{1}{4} \mu.$$

Нетрудно заметить, что при $0 \leq n < 1$ и $0 < m < 1$ параметры α и β принимают положительные значения $0 \leq 2\alpha < 1$ и $0 < 2\beta < 1$, а при $-1 < n \leq 0$ и $-1 < m < 0$ – отрицательные значения $-1 < 2\alpha \leq 0$ и $-1 < 2\beta < 0$, соответственно.

При $\alpha = 0$ и $\lambda = 0$ получим общеизвестное и досконально изученное интегральное уравнение типа Абеля с отрицательным параметром β в виде [3 – 5]

$$\int_0^x (x-t)^{-2\beta} dt = \tau(x).$$

При $\alpha = 0$ уравнение (2) принимает вид

$$\int_0^x (x-t)^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta}[\lambda(x-t)] v(t) dt = \tau(x).$$

Это уравнение называется уравнением Вольтерра первого рода с функциями Бесселя в ядрах и оно исследовано многими авторами [3 – 5].

В случае, когда $\lambda = 0$, формула обращения интегрального уравнения с гипергеометрической функцией в ядре

$$\int_0^x (x-t)^{-2\beta} F\left(\alpha, 1-\alpha; 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}\right) t^\alpha v(t) dt = x^\alpha \tau(x)$$

получена в [6, 7].

Многие задачи для уравнений гиперболического типа первого рода с двумя линиями вырождения и со спектральным параметром сводятся к решению интегрального уравнения (2) с неотрицательными параметрами ($0 \leq 2\alpha < 2\beta < 1$, λ – произвольное число) [8].

Исследованию интегрального уравнения (2) при отрицательных значениях параметров α и β посвящены сравнительно мало работ. Когда $-1 < 2\beta < 2\alpha \leq 0$ и $\lambda = 0$, отметим лишь работу [9].

При $-1 < n \leq 0$ и $-1 < m < 0$ для уравнения (1) прямая $y = 0$ параболического вырождения является особой характеристикой – огибающей обоих семейств характеристик. В зависимости от степеней вырождения m и n предельные значения $\tau(x)$ и $v(x)$ могут иметь особенности. Чтобы обеспечить необходимую гладкость решения $U(x, y)$ вне линии характеристического вырождения, необходимо требовать повышенную гладкость функций $\tau(x)$ и $v(x)$. С целью ослабить это требование в [10] дано определение и изучены свойства так называемого класса $R_2^\lambda(\alpha, \beta)$ обобщенных решений уравнения (1), который при $\alpha = 0$ и $\lambda = 0$ совпадает с классом R_2 , введенным и изученным И.Л. Каролем [11]. Кроме того, в [10] на основе известной формулы классического решения задачи Коши [12] для уравнения (1) получен явный вид обобщенного решения этой же задачи в нововведенном классе.

К такому направлению исследований примыкают работы [13, 14].

Целью данного исследования является решение интегрального уравнения (2) при $-1 < 2\beta < 2\alpha \leq 0$ и при любых значениях λ и применение полученную формулу обращения к нахождению некоторых соотношений между $\tau(x)$ и $v(x)$.

Вырожденные гипергеометрические функции от двух переменных. Нет необходимости говорить о важности свойств гипергеометрических функций. Любой исследователь, имеющий дело с практическими применениями дифференциальных или интегральных уравнений с ними встречается. Решение самых разных задач, относящихся к теплопроводности и динамике, электромагнитным

колебаниям и аэродинамике, квантовой механике и теории потенциалов, приводит к изучению гипергеометрических функций.

Разнообразие задач, приводящих к гипергеометрическим функциям, вызвало быстрый рост их числа. Например, в монографии [15] определены области сходимости гипергеометрических функций от трех переменных второго порядка.

В настоящем сообщении мы имеем дело с вырожденными гипергеометрическими функциями от двух переменных. В [15] они определены следующим образом

$$F_{l,m;n}^{p,q;k} \left[\begin{matrix} (a_p): & (b_q); & (c_k); \\ (\alpha_l): & (\beta_m); & (\gamma_n); \end{matrix} x, y \right] = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_{r+s} \prod_{j=1}^q (b_j)_r \prod_{j=1}^k (c_j)_s}{\prod_{j=1}^l (\alpha_j)_{r+s} \prod_{j=1}^m (\beta_j)_r \prod_{j=1}^n (\gamma_j)_s} \frac{x^r y^s}{r! s!},$$

где $\prod_{j=1}^i (d_j)_t = (d_1)_t (d_2)_t \dots (d_i)_t$. Область сходимости функции $F_{l,m;n}^{p,q;k}$

известна:

$$p + q < l + m + 1, p + k < l + n + 1, |x| < \infty, |y| < \infty$$

или

$$p + q > l + m + 1, p + k > l + n + 1, |x| < 1, |y| < 1,$$

и

$$|x|^{\frac{1}{p-1}} + |y|^{\frac{1}{p-1}} < 1, \text{ если } p > l; \max\{|x|, |y|\} < 1, \text{ если } p < l.$$

В дальнейшем решение интегрального уравнения (2) будет выражаться с помощью функции

$$F_{1;0;1}^{0;2;1} \left[\begin{matrix} - : & b, c; & d; \\ e : & - ; & g; \end{matrix} x, y \right] = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(b)_m (c)_m (d)_n}{(e)_{m+n} (g)_n} \frac{x^m y^n}{m! n!}.$$

Поэтому опишем некоторые свойства этой функции.

Легко видеть, что функция $F_{1;0;1}^{0;2;1}$ является естественным обобщением известной функции Гумберта Ξ_2 , т.е. имеет место равенство

$$F_{1;0;1}^{0;2;1} \left[\begin{matrix} - : & b, c; & d; \\ e : & - ; & d; \end{matrix} x, y \right] = \Xi_2(b, c; e; x, y).$$

По методу, изложенному в [16], можно выяснить, что функции Ξ_2 и $F_{1;0;1}^{0;2;1}$ являются вырожденными гипергеометрическими функциями второго и третьего порядков [16], соответственно. Известно [16], что функция Гумберта $z = \Xi_2(b, c; e; x, y)$ удовлетворяет систему уравнений

$$\begin{cases} x(1-x)z_{xx} + yz_{xy} + [e - (b+c+1)x]z_x - bcz = 0, \\ yz_{yy} + xz_{xy} + ez_y - z = 0. \end{cases}$$

Далее, следуя работе [16], нетрудно установить, что функция

$$z = F_{1;0;1}^{0;2;1} \left[\begin{matrix} - : b, c; & d; \\ e : & - ; & d; \end{matrix} x, y \right]$$

является решением следующей системы уравнений

$$\begin{cases} x(1-x)z_{xx} + yz_{xy} + [e - (b+c+1)x]z_x - bcz = 0, \\ y^2 z_{yyy} + xyz_{xyy} + gxz_{xy} + (e+g+1)yz_{yy} + (eg-y)z_y - dz = 0. \end{cases}$$

Взглянув на эти системы уравнений, легко понять, что порядок вырожденной гипергеометрической функции от двух переменных определяется наивысшим порядком частных производных входящих в данную систему.

Формула обращения интегрального уравнения (2). Имеет место следующая

Теорема. Пусть $v(x)$ – непрерывна и интегрируема в интервале $(0, 1)$, $\tau(x) \in C[0,1] \cup C^1(0,1)$ и $\tau(0) = 0$. Тогда при $-1 < 2\beta < 2\alpha \leq 0$ и при любых λ интегральное уравнение (2) обратимо по формуле

$$v(x) = T_{0x}^{\alpha, \beta, \lambda} [\tau(x)] \equiv \frac{\sin 2\beta\pi}{2\beta\pi} x^{-2\alpha} \frac{d}{dx} \left\{ x^\alpha \int_0^x t^\alpha (x-t)^{2\beta} \times \right. \\ \left. \times F_{1;0;1}^{0;2;1} \left[\begin{matrix} - : -\alpha, 1+\alpha; & \frac{1}{2} + \beta; \\ 1+\beta : & - ; & -\frac{1}{2} + \beta; \end{matrix} -\frac{(x-t)^2}{4xt}, \lambda(x-t)^2 \right] \tau'(t) dt \right\}, \quad (3)$$

и наоборот, т.е. справедливы тождества

$$T_{0x}^{\alpha, \beta, \lambda} \{ N_{0x}^{\alpha, \beta, \lambda} [v(x)] \} = v(x), \quad N_{0x}^{\alpha, \beta, \lambda} \{ T_{0x}^{\alpha, \beta, \lambda} [\tau(x)] \} = \tau(x). \quad (4)$$

Доказательство теоремы осуществим для первого из тождеств (4). Из (2) имеем

$$\begin{aligned} \tau'(t) = & -\beta t^{-\alpha-1} \int_0^t (t-s)^{-2\beta} \Xi_2(\alpha, 1-\alpha; -\beta; u, w) s^\alpha v(s) ds - \\ & - 2\beta t^{-\alpha-1} \int_0^t (t-s)^{-2\beta-1} \Xi_2(\alpha, 1-\alpha; -\beta; u, w) s^{\alpha+1} v(s) ds - \\ & - (\alpha + \beta) t^{-\alpha-1} \int_0^t (t-s)^{-2\beta} F_{1;0;1}^{0;2;1} \left[\begin{matrix} - & : & \alpha, 1-\alpha; & 1-\alpha-\beta; \\ 1-\beta & : & - & -\alpha-\beta; \end{matrix} ; u, w \right] s^\alpha v(s) ds, \end{aligned}$$

где $u = -(t-s)^2 / (4ts)$, $w = -\lambda(t-s)^2$.

Подставив теперь найденное выражение для $\tau'(t)$ в (3), после ряда несложных преобразований получим

$$v(x) = x^{-2\alpha} \frac{d}{dx} \left\{ x^\alpha \int_0^x W(x, d; \lambda) s^\alpha v(s) ds \right\}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} W(x, s; \lambda) = & \sum_{k, n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k!n!} \left(\beta - \frac{1}{2} \right)_k \left(\frac{1}{2} - \beta \right)_n \Omega(k, n; z) [\lambda(x-s)^2]^{k+n}, \\ \Omega(k, n; z) = & \sum_{p, q=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+q} (-\alpha)_p (1+\alpha)_p (\alpha)_q (1-\alpha)_q}{p!q!(1+2k+2n+2p+2q)!} \times \\ & \times \left(\frac{1}{2} + \beta + k \right)_p \left(\frac{1}{2} - \beta + n \right)_q z^{2p+q} (1-z)^{-q} E(k, n; p, q; z), \\ E(k, n; p, q; z) = & (-\alpha - 2\beta + 2n + q) z F(2 + 2k + 2n + 2p + 2q; z) + \\ & + (1 + 2k + 2n + 2p + 2q)(1-z) F(1 + 2k + 2n + 2p + 2q; z), \quad z = (x-s)/x. \end{aligned}$$

Здесь для краткости принята запись

$$F(d; z) = F(1 + 2\beta + 2k + 2p, 1 + p + q; d; z),$$

где $F(a, b; d; u)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Продолжение доказательства теоремы существенно опирается на свойства функции $W(x, s; \lambda)$. Выделим следующее утверждение в виде леммы, доказательство которой приведем после доказательства теоремы.

Лемма. При любых λ и $0 < s < x < 1$ справедливо тождество

$$W(x, s; \lambda) = (1 - z)^\alpha. \quad (6)$$

Теперь в продолжении доказательства теоремы, если учитывать, что $W(x, s; \lambda) = (s/x)^\alpha$, то соотношение (5) превращается в тождество. Тем самым доказано первое из тождеств (3). Аналогично доказывается и второе тождество. Теорема доказана.

Доказательство леммы. Пусть $\lambda = 0$. Тогда $W(x, s; 0) = \Omega(0, 0; z)$. Применяя известную формулу

$$(1 - z)^{-q} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(q)_m}{m!} z^m,$$

получим

$$\Omega(0, 0; z) = \sum_{p, q, m, l=0}^{\infty} A(p, q, m, l) z^{2p+q+m+l} + \sum_{p, q, m, l=0}^{\infty} B(p, q, m, l) z^{1+2p+q+m+l},$$

где A и B – известные функции от p, q, m и l . Нетрудно установить равенство:

$$\sum_{p, q, m, l=0}^{\infty} A(p, q, m, l) z^{2p+q+m+l} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{[p/2]} \sum_{m=0}^{p-2q} \sum_{l=0}^{p-2q-m} A(q, m, p-2q-k-l, l) z^p,$$

где $[p]$ – целая часть числа p . Используя это равенство и свойства символа Похгаммера, затем приведя подобные члены по степеням z , после нескольких преобразований получим

$$W(x, s; 0) = (1 - z)^\alpha. \quad (7)$$

При наличии λ , т.е. при $\lambda \neq 0$, следует учитывать, что

$$W(x, s; \lambda) = \sum_{k, n=0}^{\infty} (-1)^k \Omega_1(k; z) [\lambda(x-s)^2]^k,$$

где

$$\Omega_1(k; z) = \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!(k-n)!} \left(\beta - \frac{1}{2}\right)_{k-n} \left(\frac{1}{2} - \beta\right)_n \Omega(k-n, n; z).$$

Легко видеть, что $\Omega_1(0; z) = \Omega(0, 0; z)$, поэтому функцию $\Omega_1(k; z)$ исследуем при $k \geq 1$.

При каждом k повторив рассуждения, проведенные как в случае $\lambda = 0$, будем иметь $\Omega_1(k; z) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$W(x, s; \lambda) \equiv 0, \quad \lambda \neq 0. \quad (8)$$

Объединив результаты (7) и (8), заключаем, что при любых λ справедливо равенство $W(x, s; \lambda) = (1 - z)^\alpha$. Лемма доказана.

Применения операторов (2) и (3). Рассмотрим уравнение (1) в конечной односвязной области D , ограниченной характеристиками

$$AC : \xi \equiv \frac{2}{n+2} x^{(n+2)/2} - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} = 0,$$

$$BC : \eta \equiv \frac{2}{n+2} x^{(n+2)/2} - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} = 1$$

и $AB : y = 0$ уравнения (1) при $y \leq 0$ и $x \geq 0$, где m , n и μ – действительные числа, причем $-1 < m < 0$, $-1 < n \leq 0$.

В характеристических координатах ξ и η уравнение (1) переходит в уравнение типа обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\alpha}{\eta + \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\beta}{\eta - \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \lambda u = 0, \quad (9)$$

а область D преобразуется в область Δ , граница которой состоит из отрезков прямых $PM : \xi = 0$, $QM : \eta = 1$ и $PQ : \eta = \xi$, где

$$\alpha = \frac{n}{2(n+2)}, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)}, \quad -1 < 2\alpha \leq 0, \quad -1 < 2\beta < 0, \quad \lambda = \frac{1}{4}\mu.$$

Решение задачи Коши для уравнения (9) в области Δ из класса $R_2^\lambda(\alpha, \beta)$ с начальными данными

$$u(\xi, \xi) = \tau(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (10)$$

$$[2(1 - 2\beta)]^{-2\beta} \lim_{\eta \rightarrow \xi} (\eta - \xi)^{2\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \nu(\xi), \quad 0 < \xi < 1 \quad (11)$$

известно [8]:

$$u(\xi, \eta) = \left(\frac{\eta + \xi}{2} \right)^{-\alpha} \int_0^\xi (\eta - t)^{-\beta} (\xi - t)^{-\beta} t^\alpha \Xi_2[\alpha, 1 - \alpha; 1 - \beta; \sigma, \rho] T(t) dt +$$

$$+\left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)^{-\alpha} \int_{\xi}^{\eta} (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} t^{\alpha} \Xi_2[\alpha, 1-\alpha; 1-\beta; \sigma, \rho] N(t) dt, \quad (12)$$

где $T(t)$ – непрерывная и интегрируемая в $(0, 1)$ функция,

$$\begin{aligned} N(t) &= [2 \cos \beta \pi]^{-1} T(t) - \gamma_2 v(x), \\ \gamma_2 &= [2(1-2\beta)]^{2\beta-1} \Gamma(2-2\beta) \Gamma^{-1}(1-\beta), \\ \sigma &= \frac{(\eta-t)(t-\xi)}{2t(\eta+\xi)}, \quad \rho = \lambda(\eta-t)(t-\xi). \end{aligned}$$

Для определения $T(t)$ воспользуемся вышеизложенной теоремой. В самом деле, положив $\eta = \xi = x$, из (12) получим

$$\tau(x) = x^{-\alpha} \int_0^x (x-t)^{-2\beta} t^{\alpha} \Xi_2\left[\alpha, 1-\alpha; 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\lambda(x-t)^2\right] T(t) dt.$$

Отсюда, в силу формулы (3), найдем

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{\sin 2\beta\pi}{2\beta\pi} x^{-2\alpha} \frac{d}{dx} \left\{ x^{\alpha} \int_0^x t^{\alpha} (x-t)^{2\beta} \times \right. \\ &\times F_{1:0,1}^{0:2,1} \left[\begin{array}{l} - : -\alpha, 1+\alpha; \quad \frac{1}{2} + \beta; \\ 1+\beta : \quad - ; \quad -\frac{1}{2} + \beta; \end{array} ; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\lambda(x-t)^2 \right] \tau'(t) dt \left. \right\}. \end{aligned}$$

Приведем другое применение формул обращения (2), (3).

Рассмотрим задачу Коши-Гурса для уравнения (9) с условиями (11) и

$$u(0, \eta) = \varphi(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

Решение этой задачи из класса $R_2^{\lambda}(\alpha, \beta)$ имеет явный вид [14]:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)^{-\alpha} \int_0^{\xi} (\eta-t)^{-\beta} (\xi-t)^{-\beta} t^{\alpha} \Xi_2[\alpha, 1-\alpha; 1-\beta; \sigma, \rho] \Psi(t) dt + \\ &+ \left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)^{-\alpha} \int_{\xi}^{\eta} (\eta-t)^{-\beta} (t-\xi)^{-\beta} t^{\alpha} \Xi_2[\alpha, 1-\alpha; 1-\beta; \sigma, \rho] \Phi(t) dt, \quad (13) \end{aligned}$$

где $\Psi(x) = 2\gamma_2 \cos \beta\pi \cdot v(x) + \Phi(x)$, $\Phi(x)$ – известная функция.

Формула (13) играет важную роль при изучении задач для уравнений смешанного типа, так как из нее при $\eta = \xi = x$ легко вывести основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$ на линии вырождения, принесенное из гиперболической части смешанной области.

Действительно, предположим в задаче Коши-Гурса $\varphi(x) = 0$ и в (13) положим $\eta = \xi = x$. Тогда получаем интегральное уравнение вида (2). Теперь воспользовавшись теоремой, решение последнего уравнения находим в виде (3).

Выводы. Таким образом, в результате исследований получена формула обращения (3) интегрального уравнения (2) при $-1 < 2\beta < 2\alpha \leq 0$ и произвольных значениях параметра λ . Формула (3) является очень важным инструментом при исследовании локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанных параболического и эллиптического-гиперболического типов второго рода со спектральным параметром.

Список литературы: 1. *Colton D.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory (Series: Applied Mathematical Sciences. Book 82) / *D. Colton, R. Kress* // Springer, 3rd ed., 2014. – 412 p. 2. *Li M.* Solving Abel's type integral equations with Mikusinski's operator of fractional order / *M. Li, W. Zhao* // Hindawi Publishing Corporation Advances in Mathematical Physics. – 2014. – Vol. 19. – № 5. – P. 49-59. 3. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / *С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев*. – Минск, "Наука и техника", 1987. – 688 с. 4. *Polyanin A.D.* Handbook of integral equations / *A.D. Polyanin, A.V. Manzhirov* // CRS Press. – 2008. – 1444 p. 5. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа / *М.М. Смирнов*. – М.: "Высшая школа", 1985. – 304 с. 6. *Saigo M.A.* Remark on Integral Operators Involving the Gauss Hypergeometric Functions / *M.A. Saigo* // Mathematical Reports of College of General Education, Kyushu University. – 1978. – Vol. 11. – № 2. – P. 135-143. 7. *Салахитдинов М.С.* Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения / *М.С. Салахитдинов, А. Хасанов* // Дифференциальные уравнения. – Минск, 1983. – Т. 19. – № 1. – С. 110-119. 8. *Салахитдинов М.С.* К спектральной теории уравнений смешанного типа / *М.С. Салахитдинов, А.К. Уринов*. – Ташкент: "Mumtoz so'z", 2010. – 356 с. 9. *Смирнов М.М.* Решение в замкнутой форме уравнения Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре / *М.М. Смирнов* // Дифференциальные уравнения, 1982. – Т. 13. – № 1. – С. 171-173. 10. *Эргашев Т.Г.* Интегральное представление обобщенного решения задачи Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода / *Т.Г. Эргашев*. // Материалы VI Ферганской конференции "Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения". – Ташкент, 2011. – С. 269-271. 11. *Кароль И.Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптического-гиперболического типа / *И.Л. Кароль* // ДАН, 1953. – Т. 88. – № 2. – С. 197-200. 12. *Эргашев Т.Г.* Задача Коши для вырождающегося гиперболического уравнения второго рода / *Т.Г. Эргашев* // Узбекский математический журнал. – 2009. – № 4. – С. 180-190. 13. *Эргашев Т.Г.* Обобщенные решения одного вырождающегося гиперболического уравнения второго

рода со спектральним параметром / Т.Г. Эргашев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2017. – № 46. – С. 41-49.

14. Эргашев Т.Г. Обобщенное решение задачи Коши-Гурса для одного вырождающегося гиперболического уравнения второго рода со спектральным параметром / Т.Г. Эргашев // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ "Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения". – Ташкент, 2013. – С. 115-117.

15. Srivastava H.M. *Multipl. Gaussian Hypergeometric Series* / H.M. Srivastava, P.W. Karlsson. – Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons. – New York, Chichester, Brisbane and Toronto, 1985. – 386 p.

16. Erdelyi A. *Higher transcendental functions* / A. Erdelyi. – 1953. – Vol. 1. – New York: McGraw Hill Book. Co. – 302 p.

References:

1. Colton, D. and Kress, R. (2014), *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory (Series: Applied Mathematical Sciences. Book 82)*, 3rd ed., Springer, 412 p.
2. Li, M. and Zhao, W. (2014), "Solving Abel's type integral equations with Mikusinski's operator of fractional order", *Hindawi Publishing Corporation Advances in Mathematical Physics*, Vol. 19, No 5, pp. 49-59.
3. Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. (1987), *Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications*, "Nauka i tehnika", Minsk, 688 p.
4. Polyanin, A.D. and Manzhirov, A.V. (2008), *Handbook of integral equations*, CRS Press, 1444 p.
5. Smirnov, M.M. (1985), *Equations of mixed type*, "Vysshaja shkola", Moscow, 304 p.
6. Saigo, M.A. (1978), "Remark on Integral Operators Involving the Gauss Hypergeometric Functions", *Mathematical Reports of College of General Education*, Kyushu University, Vol. 11, No 2, pp. 135-143.
7. Salakhitdinov, M.S. and Hasanov, A. (1983), "The Tricomi problem for a mixed-type equation with a nonsmooth degeneration line", *Differential equations*. Minsk, Vol.19, No 1, pp. 110-119.
8. Salakhitdinov, M.S. and Urinov, A.K. (2010), *The spectral theory of equations of mixed type*, "Mumtozso'z", Tashkent, 356 p.
9. Smirnov, M.M. (1982), "Solution in the closed form of the Volterra equation with hypergeometric function in the kernel", *Differential equations*. Minsk, Vol. 13, No. 1, pp. 171-173.
10. Ehrgashev, T.G. (2011), "Integral representation of the generalized solution of the Cauchy problem for a degenerate hyperbolic equation of the second kind", *Proceedings of the VI Fergana Conference "Limit theorems of probability theory and their applications"*, Fehrgana, 10-12 may 2011, Tashkent, pp. 269-271.
11. Karol', I.L. (1953), "On a boundary-value problem for an equation of mixed elliptic-hyperbolic type", *Reports of the Academy of Sciences of USSR*, Vol. 88, No. 2, pp. 197-200.
12. Ehrgashev, T.G. (2009), "The Cauchy problem for a degenerate hyperbolic equation of the second kind", *Uzbek Mathematical Journal*, No. 4, pp. 180-190.
13. Ehrgashev, T.G. (2017), "Generalized solutions of the degenerate hyperbolic equation of the second kind with a spectral parameter", *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, Vol. 46, pp. 41-49.
14. Ehrgashev, T.G. (2013), "Generalized solution of the Cauchy-Goursat problem for a degenerate hyperbolic equation of the second kind with a spectral parameter", *Theses of reports of the Republican scientific conference with the participation of scientists from the CIS countries "Modern problems of differential equations and their applications"*, November 21-23, 2013, Tashkent, pp. 115-117.

15. Srivastava, H.M. and Karlsson, P.W. (1985), *Multipl. Gaussian Hypergeometric Series*, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane and Toronto, 386 p.

16. Bateman, H. and Erdelyi, A. (1953), *Higher transcendental functions*, Vol. 1, Mc Graw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, 302 p.

Статью представил ведущий сотрудник Института математики им. В.И. Романовского АН Узбекистана д-р физ.-мат. наук Анвар Хасанов.

Поступила 17.08.2017.

Ehrgashev Tuhtasin, Cand. Phy.-Math. Sci., Associate professor
Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers
Uzbekistan, Tashkent, 100000, Kari-Niyazi st., 39
Tel.: +99894 673 1869, +99871 2230524, E-mail: ertuhtasin@mail.ru

УДК 517.956.6;517.44

Формула звернення інтегрального рівняння Вольєрра з функцією Гумберта в ядрі і її додатки до рішення крайових задач / Ергашев Т.Г. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2017. – № 50 (1271). – С. 75 – 87.

Багато задач прикладної математики зводяться до вирішення інтегральних рівнянь зі спеціальними функціями в ядрах, тому формули звернення таких рівнянь відіграють важливу роль при вирішенні різних завдань. В роботі введена і розглянута одна вироджена гіпергеометрична функція від двох змінних, через яку виражається рішення досліджуваного інтегрального рівняння Вольєрра першого роду. Знайдена формула звернення застосована до знаходження деяких співвідношень між шуканим рішенням і його похідної крайової задачі для гіперболічного рівняння з двома лініями виродження і з спектральним параметром. Бібліогр.: 16 назв.

Ключові слова: інтегральне рівняння Вольєрра першого роду, формула звернення, вироджена гіпергеометрична функція від двох змінних, спектральний параметр.

УДК 517.956.6;517.44

Формула обращения интегрального уравнения Вольерра с функцией Гумберта в ядре и её приложения к решению краевых задач / Эргашев Т.Г. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2017. – № 50 (1271). – С. 75 – 87.

Многие задачи прикладной математики сводятся к решению интегральных уравнений со специальными функциями в ядрах, поэтому формулы обращения таких уравнений играют важную роль при решении различных задач. В работе введена и рассмотрена одна вырожденная гипергеометрическая функция от двух переменных, через которую выражается решение исследуемого интегрального уравнения Вольерра первого рода. Найденная формула обращения применена к нахождению некоторых соотношений между искомым решением и его производной краевой задачи для гиперболического уравнения с двумя линиями вырождения и со спектральным параметром. Библиогр.: 16 назв.

Ключевые слова: интегральное уравнение Вольерра первого рода, формула обращения, вырожденная гипергеометрическая функция от двух переменных, спектральный параметр.

УДК 517.956.6;517.44

The inversion formula for the Volterra integral equation with the Humbert function in the nuclear and its applications to the boundary value problems / Erganashev T.G. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2017. – №. 50 (1271). – P. 75 – 87.

Many problems of applied mathematics are reduced to the solution of integral equations with special functions in kernels, therefore the inversion formulas for such equations play an important role in solving various problems. The paper introduces and considers one degenerate hypergeometric function of two variables, through which the solution of the Volterra integral equation of the first kind is analyzed. The inversion formula found is applied to finding some relations between the desired solution and its derivative of the boundary value problem for a hyperbolic equation with two degeneration lines of the second kind and with a spectral parameter. Refs.: 16 titles.

Keywords: Volterra integral equation of the first kind, the inversion formula, the degenerate hypergeometric function of two variables, the spectral parameter.