УДК 861.5.015.2 DOI: 10.20998/2411-0558.2018.24.08

В. Д. ДМИТРИЕНКО, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПИ",
А. Ю. ЗАКОВОРОТНЫЙ, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПИ",
Н. В. МЕЗЕНЦЕВ, канд. техн. наук, доц., НТУ "ХПИ",
Д. М. ГЛАВЧЕВ, асп., НТУ "ХПИ"

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРОГРАММНЫХ КОМПОНЕНТ БОРТОВОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПРЕОБРАЗОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ К ЭКВИВАЛЕНТНЫМ ЛИНЕЙНЫМ

Исследуются возможности расширения области применения геометрической теории управления (ГТУ). Показано, что применение ГТУ только для части уравнений, описывающих объект, может существенно уменьшить объём вычислений при поиске эквивалентных линейных моделей в форме Бруновского для нелинейных аффинных систем с векторным управлением в пространстве "вход-состояние". Ил.: 1. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: геометрическая теория управления; эквивалентные линейные модели; форма Бруновского; пространство "вход-состояние".

Постановка проблемы и анализ литературы. Геометрическая теория управления ГТУ является перспективным методом при поиске оптимальных управлений различными техническими объектами [1 – 10]. В частности, при компьютерном управлении процессами движения дизель-поезда с тяговым асинхронным приводом. Широкому применению этой теории мешают громоздкие аналитические преобразования, связанные с необходимостью вычислений производных и скобок Ли, определением инволютивности распределений, функций преобразования, связывающих переменные в исходных нелинейных моделях объектов управления с переменными моделей в форме Бруновского, и т.д. Большую часть этих преобразований удалось автоматизировать с помощью разработанного специализированного программного обеспечения, позволяющего синтезировать законы управления для нелинейных объектов, в частности, для дизель-поездов, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих десятки уравнений [11]. Однако, правые части почти всех систем обыкновенных дифференциальных уравнений содержали не более одного-двух одночленов. Это было связано с тем, что при определении функций преобразования, связывающих переменные линейных и нелинейных уравнений, необходимо решать систему уравнений в частных производных, что в общем случае не является тривиальной

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

задачей. Поэтому актуальна проверка возможности работы программных компонент при увеличении сложности правых частей уравнений, описывающих нелинейный объект управления.

При разработке программного обеспечения для бортовой вычислительной системы дизель-поезда всё внимание было уделено получению линейных моделей с помощью ГТУ для полных нелинейных моделей исходных объектов управления [3, 5, 10, 11]. Возможности применения ГТУ только для части каналов управления объектом или только для части уравнений, описывающих объект управления, не рассматривались, однако такой подход может существенно уменьшать объем вычислений при поиске эквивалентных линейных моделей (и дальнейшем поиске оптимальных управлений).

Одним из необходимых условий получения линейных эквивалентов в форме Бруновского для нелинейных аффинных систем размерности n с векторным управлением в пространстве "вход-состояние" с помощью статической обратной связи является требование инволютивности распределений $\boldsymbol{M}^j (j = \overline{0,p})$, где $p = k_{\max} - 1$, $k_{\max}$ – наибольший индекс управляемости для клеток Бруновского [1, 11]. Если это требование не выполняется, тогда точная линеаризация нелинейной аффинной системы с помощью статической обратной связи невозможна и необходимо проверять условия возможности линеаризации исходной нелинейной системы в расширенном пространстве, получаемом за счёт введения в систему уравнений объекта управления дополнительных дифференциальных уравнений (интеграторов в цепи управления). Этот подход к получению линейных эквивалентов нелинейных систем называют динамической линеаризацией в пространстве "вход-состояние" с помощью обратной связи. Он фактически сводит динамическую линеаризацию с помощью обратной связи к статической линеаризации в расширенном пространстве. При этом введение интегратора в один из каналов управления меняет свойства пространства, в котором ищется решение задачи статической линеаризации, что приводит к требованиям инволютивности более простых распределений, причём эти требования зависят от числа управлений, входящих в нелинейную математическую модель объекта управления [1, 11]. В связи с этим, в программное обеспечение бортовой информационно-управляющей системы, автоматизирующей процессы управления дизель-поездом, необходимо ввести новые программные компоненты, позволяющие уменьшить объём необходимых вычислений при определении управлений дизель-поездом.

Целью статьи является исследование возможностей программных компонент бортовой вычислительной системы при преобразовании

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

нелинейных систем к эквивалентным линейным и обоснование разработки новых программных компонент, расширяющих область применения ГТУ и минимизирующих объём необходимых вычислений при определении управлений нелинейными динамическими объектами с помощью ГТУ.

Раздел 1. Применение ГТУ при линеаризации полной математической модели объекта управления.

Пусть объект управления описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_2;\\
&\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_3x_5 + a_{22} + a_{23}x_2 + a_{24}x_2^2 + a_{25}x_1 + a_{26}x_1^2 + a_{27}x_1^3;\\
&\frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_3 + a_{32}x_4;\\
&\frac{dx_4}{dt} = a_{41}x_4 + a_{42}x_3 + u_1;\\
&\frac{dx_5}{dt} = a_{51}x_2 + a_{52}\frac{x_6}{x_3};\\
&\frac{dx_6}{dt} = a_{61}x_6 + a_{62}x_2x_3 + u_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_6)$ – вектор фазовых переменных исходного объекта; $a_{11}, a_{12}, ..., a_{62}$ – постоянные коэффициенты; u_1, u_2 – управления.

С системой объекта управления связаны следующие векторные поля:

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} g_1 = a_{11}x_2 \\ g_2 = a_{21}x_3x_5 + a_{22} + a_{23}x_2 + a_{24}x_2^2 + a_{25}x_1 + a_{26}x_1^2 + a_{27}x_1^3 \\ g_3 = a_{31}x_3 + a_{32}x_4 \\ g_4 = a_{41}x_4 + a_{42}x_3 \\ g_5 = a_{51}x_2 + a_{52}\dfrac{x_6}{x_3} \\ g_6 = a_{61}x_6 + a_{62}x_2x_3 \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_1 = \begin{vmatrix}0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0\end{vmatrix}^T, \ \boldsymbol{Y}_2 = \begin{vmatrix}0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1\end{vmatrix}^T.$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Из вида системы уравнений (1) следует, что наибольший индекс управляемости для клеток Бруновского k_{max} должен быть не меньше четырёх. Поэтому для получения математической модели объекта управления в форме Бруновского необходимо выполнение условия инволютивности для распределений $\boldsymbol{M}^j, j=\overline{0,k_{max}-1}$.

Распределение $\boldsymbol{M}^0=\mathrm{span}(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2)$, где $\mathrm{span}(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2)$ – линейная оболочка векторов $\boldsymbol{Y}_1$ и $\boldsymbol{Y}_2$, инволютивно в силу постоянства компонент рассматриваемых векторов.

Проверим теперь инволютивность распределения $\boldsymbol{M}^1=\mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\boldsymbol{L_X Y}_1,\boldsymbol{L_X Y}_2\}$, где $\boldsymbol{L_X Y}_1$, $\boldsymbol{L_X Y}_2$ – производные Ли соответствующих векторов вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{L_X Y}_1=[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}_1]=\frac{\partial \boldsymbol{Y}_1}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{X}-\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1=-\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1=$$

$$=-\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_6} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_6}{\partial x_1} & \frac{\partial g_6}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_6}{\partial x_6} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{vmatrix}=$$

$$=-\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{25}+2a_{26}x_1+3a_{27}x_1^2 & a_{23}+2a_{24}x_2 & a_{21}x_6 & 0 & 0 & a_{21}x_3 \\ 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{42} & a_{41} & 0 & 0 \\ 0 & a_{51} & -(a_{52}x_6/x_3^2) & 0 & 0 & a_{52}/x_3 \\ 0 & a_{62}x_3 & a_{62}x_2 & 0 & 0 & a_{61} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\-a_{32}\\-a_{41}\\0\\0\end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{L_X Y}_2=[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}_2]=\frac{\partial \boldsymbol{Y}_2}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{X}-\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2=-\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_2=\begin{vmatrix}0 & -a_{21}x_3 & 0 & 0 & -\frac{a_{52}}{x_3} & -a_{61}\end{vmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Для проверки инволютивности распределения $\boldsymbol{M}^1$ необходимо вычислить скобки Ли $[\boldsymbol{L_X Y}_1,\boldsymbol{L_X Y}_2]$:

$$[\boldsymbol{L_X Y}_1,\boldsymbol{L_X Y}_2]=\frac{\partial \boldsymbol{L_X Y}_2}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{L_X Y}_1-\frac{\partial \boldsymbol{L_X Y}_1}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{L_X Y}_2=$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a_{21} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{52}/x_3^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0\\ 0\\ -a_{32}\\ -a_{41}\\ 0\\ 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\ a_{31}a_{32}\\ 0\\ 0\\ -(a_{32}a_{52}/x_5^2)\\ 0\end{vmatrix}$$

и сформировать матрицу распределения $\boldsymbol{M}^1$ с дополнительным столбцом.

$$\boldsymbol{M}^1=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -a_{21}x_3 & a_{21}a_{32}\\ 0 & 0 & -a_{32} & 0 & 0\\ 1 & 0 & -a_{41} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{a_{52}}{x_3} & -\dfrac{a_{32}a_{52}}{x_5^2}\\ 0 & 1 & 0 & -a_{61} & 0\end{vmatrix}.$$

Проверка инволютивности распределения $\boldsymbol{M}^1$ показывает, что оно не является инволютивным. Вводим в систему уравнений объекта (1) дополнительное уравнение $\dfrac{dx_7}{dt}=v_2$, $u_2=x_7$. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_2;\\
&\frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_3x_5+a_{22}+a_{23}x_2+a_{24}x_2^2+a_{25}x_1+a_{26}x_1^2+a_{27}x_1^3;\\
&\frac{dx_3}{dt}=a_{31}x_3+a_{32}x_4;\\
&\frac{dx_4}{dt}=a_{41}x_4+a_{42}x_3+v_1;\\
&\frac{dx_5}{dt}=a_{51}x_2+a_{52}\frac{x_6}{x_3};\\
&\frac{dx_6}{dt}=a_{61}x_6+a_{62}x_2x_3+x_7;\\
&\frac{dx_7}{dt}=v_2.
\end{aligned}\tag{2}$$

где $v_1=u_1$.

С системой уравнений (2) связаны следующие векторные поля:

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\boldsymbol{X}^*(\boldsymbol{x}^*)=\left|\begin{matrix} g_1=a_{11}x_2 \\ g_2=a_{21}x_3x_5+a_{22}+a_{23}x_2+a_{24}x_2^2+a_{25}x_1+a_{26}x_1^2+a_{27}x_1^3 \\ g_3=a_{31}x_3+a_{32}x_4 \\ g_4=a_{41}x_4+a_{42}x_3 \\ g_5=a_{51}x_2+a_{52}\dfrac{x_6}{x_3} \\ g_6=a_{61}x_6+a_{62}x_2x_3+x_7 \\ g_7=0 \end{matrix}\right|,$$

$$\boldsymbol{Y}_1^*=\left|0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\right|^T,\ \boldsymbol{Y}_2^*=\left|0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\right|^T,$$

где $\boldsymbol{x}^*=(x_1,x_2,...,x_7)$.

Проверки инволютивности распределений $\boldsymbol{M}^0$, $\boldsymbol{M}^1$ показали, что они инволютивны. Инволютивны и распределения $\boldsymbol{M}_{Y_1}^2=\operatorname{span}\{\boldsymbol{Y}_1^*,\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^*,\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2\boldsymbol{Y}_1^*\}$, $\boldsymbol{M}_{Y_2}^2=\operatorname{span}\{\boldsymbol{Y}_2^*,\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^*,\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2\boldsymbol{Y}_2^*\}$, где $\boldsymbol{Y}_1^*$, $\boldsymbol{Y}_2^*$ – векторы управлений для расширенной системы дифференциальных уравнений (2).

Из инволютивности распределений $\boldsymbol{M}_1^0,\boldsymbol{M}_1^1,\boldsymbol{M}_{Y_1}^3,\boldsymbol{M}_{Y_2}^3$ следует, что система уравнений (2) может быть преобразована к канонической форме Бруновского, которая имеет две клетки с индексами управляемости $k_1=4$ и $k_2=3$:

$$\begin{gathered}\frac{d\,z_{\mathrm{i}}}{dt}=z_{i+1},\ \ \mathrm{i}=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6; \\ \frac{d\,z_4}{dt}=u_1^*,\ \frac{d\,z_7}{dt}=u_2^*.\end{gathered}\tag{3}$$

Для системы уравнений (3), существуют преобразования: $z_1=T_1(\boldsymbol{x})=T_1(x_1,x_2,...,x_7)$ и $z_5=T_2(\boldsymbol{x})=T_2(x_1,x_2,...,x_7)$, с помощью которых, выполняя дифференцирование функций $T_1(\boldsymbol{x})$ и $T_2(\boldsymbol{x})$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}^*+u_1^*\boldsymbol{Y}_1^*+u_2^*\boldsymbol{Y}_2^*$, несложно определить z_2, z_3,…, z_7:

$$\frac{d\,z_1}{dt}=z_2=\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}T_1(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)+u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)+u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}T_1(\boldsymbol{x}^*);\tag{4}$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\frac{d\,z_2}{dt} = z_3 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\,T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}(T_1(\boldsymbol{x}^*)) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}(T_1(\boldsymbol{x}^*)) + \\ + u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\,T_1(\boldsymbol{x}^*)); \tag{5}$$

$$\frac{d\,z_3}{dt} = z_4 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\,T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}(T_1(\boldsymbol{x}^*)) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}(T_1(\boldsymbol{x}^*))) + \\ + u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\,T_1(\boldsymbol{x}^*)); \tag{6}$$

$$\frac{dz_4}{d\,\mathrm{t}} = u_1^* = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}^4_{\boldsymbol{X}^*}(T_1(\boldsymbol{x}^*)) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) + \\ + u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)); \tag{7}$$

$$\frac{d\,z_5}{dt} = z_6 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}\,T_2(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}\,T_2(\boldsymbol{x}^*) + u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}\,T_2(\boldsymbol{x}^*); \tag{8}$$

$$\frac{d\,z_6}{dt} = z_7 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\,T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}(T_2(\boldsymbol{x}^*)) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)) + \\ + u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\,T_2(\boldsymbol{x}^*)); \tag{9}$$

$$\frac{d\,z_7}{dt} = u_2^* = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\,T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}(T_2(\boldsymbol{x}^*)) + u_1^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)) + \\ + u_2^*\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\,T_2(\boldsymbol{x}^*)), \tag{10}$$

где $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}T_k(\boldsymbol{x}^*)$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_k(\boldsymbol{x}^*)$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}T_k(\boldsymbol{x}^*)$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}T_k(\boldsymbol{x}^*)$, $k = 1,\ 2$ – производные Ли функций $T_k(\boldsymbol{x}^*)$ вдоль векторных полей $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}^*$, $\boldsymbol{Y}_1^*$, $\boldsymbol{Y}_2^*$; $\boldsymbol{L}_G^m$ – кратные производные Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{G}$ $(\boldsymbol{G} = \boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{Y}_1^*, \boldsymbol{Y}_2^*)$, $m = 2,\ 3$.

Из системы уравнений в форме Бруновского (3) следует, что переменные z_1, z_2, z_3, z_5 и z_6 не зависят от управлений u_1^* и u_2^*. Исходя из этого, следует что в выражениях (4) – (6), (8), (9) коэффициенты при управления u_1^* и u_2^* равны нулю:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}T_1(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}T_1(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \\ = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\mathrm{T}_1(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}T_1(\boldsymbol{x}^*)) = 0; \tag{11}$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}T_2(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}T_2(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \\ = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}T_2(\boldsymbol{x}^*)) = 0. \tag{12}$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

При этом, коэффициенты при управлениях u_1^* и u_2^* в уравнениях (7) и (10) не равны нулю:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\,T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial x^*}, \boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle \neq 0; \\ &\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\,T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial x^*}, \boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle \neq 0; \end{aligned} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\,T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial x^*}, \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle \neq 0; \\ &\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\,T_2(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial x^*}, \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle \neq 0. \end{aligned} \qquad (14)$$

Соотношения (11) – (14) в компактной форме описывают 10 дифференциальных уравнений в частных производных и четыре дифференциальных неравенства, с помощью которых можно определить функции преобразования $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ и $T_2(\boldsymbol{x}^*)$. Эти функции в общем случае могут зависеть от семи компонент вектора $\boldsymbol{x}^* = (x_1, x_2, ..., x_7)$. Из первых двух дифференциальных уравнений имеем:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}\,T_1(\boldsymbol{x}^*) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}_i^*} y_{1i} = \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}_1}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_2}\cdot 0 +$$

$$+\frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}_3}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}_4}\cdot 1 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}_5}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}_6}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}_7}\cdot 0 = 0.$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}\,T_1(\boldsymbol{x}^*) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = \sum_{i=1}^{7} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}_i^*}\cdot y_{2\mathrm{i}} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}_i}\cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}_7}\cdot 1 = 0.$$

Отсюда следует, что функция $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ не зависит от аргументов x_4 и x_7.

Для дальнейшего анализа функции $T_1(\boldsymbol{x}^*)$ используют из соотношения (11) следующие четыре дифференциальных уравнения в частных производных, в которых используются производные Ли первого и второго порядка:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\,T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = 0; \qquad (15)$$

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\,T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = 0; \qquad (16)$$

$$L_{Y_1^*}(L_{X^*}^2\, T_1(x^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial x^*}, L_{X^*}^2 Y_1^* \right\rangle = 0; \qquad (17)$$

$$L_{Y_2^*}(L_{X^*}^2\, T_1(x^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial x^*}, L_{X^*}^2 Y_2^* \right\rangle = 0, \qquad (18)$$

где

$$L_{X^*}Y_1^* = [X^*, Y_1^*] = \frac{\partial Y_1^*}{\partial x^*}X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x^*}Y_1^* = -\frac{\partial X^*}{\partial x^*}Y_1^* =$$

$$= \left| 0,\ 0,\ -a_{32},\ \mathrm{a}_{41},\ 0,\ 0,\ 0 \right|^T;$$

$$L_{X^*}Y_2^* = [X^*, Y_2^*] = -\frac{\partial X^*}{\partial x^*}Y_2^* = \left| 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0 \right|^T.$$

Теперь можно вычислить $L_{X^*}^2 Y_1^*$ и $L_{X^*}^2 Y_2^*$:

$$L_{X^*}^2 Y_1^* = [X^*, L_{X^*}Y_1^*] = \frac{\partial L_{X^*}Y_1^*}{\partial x}X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x}L_{X^*}Y_1^* = -\frac{\partial X^*}{\partial x}L_{X^*}Y_1^* =$$

$$= -\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_7} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_7} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_7}{\partial x_1} & \frac{\partial g_7}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_7}{\partial x_7} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_{32} \\ -a_{41} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{25} + 2a_{26}x_1 + 3a_{27}x_1^2 & a_{23} + 2a_{24}x_2 & a_{21}x_5 & 0 & a_{21}x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{42} & a_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{51} & -a_{52}\frac{x_6}{x_3^2} & 0 & 0 & \frac{a_{52}}{x_3} & 0 \\ 0 & a_{62}x_3 & a_{62}x_2 & 0 & 0 & a_{61} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_{32} \\ -a_{41} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left| 0, a_{21}x_5a_{32}, -(a_{31}a_{32} + a_{32}a_{41}), -(a_{32}a_{42} + a_{41}^2), (a_{32}a_{52}\frac{x_6}{x_3^2}), -(a_{32}a_{62}x_2), 0 \right|^T.$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Аналогичным образом вычисляется $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2 \boldsymbol{Y}_2^*$:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 \boldsymbol{Y}_2^* = [\boldsymbol{X}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}_2^*] = \frac{\partial \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}_2^*}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{X} - \frac{\partial \boldsymbol{X}^*}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{Y}_2^* = \left| 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{a_{52}}{x_3},\ a_{61},\ 0 \right|^T.$$

Далее, становится возможным вычислить $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 \boldsymbol{Y}_1^*$ и $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 \boldsymbol{Y}_2^*$. Поскольку эти выражения громоздки, то мы их не приводим.

Из соотношения (5) $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)) = 0$ имеем:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} \boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \left| 0 \quad 0 \quad -a_{32} \quad -a_{42} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right| \right\rangle =$$
$$= \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_3}(-a_{32}) + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_4}(-a_{41}) = 0.$$

Поскольку $\boldsymbol{T}_1(x^*)$ не зависит от x_4, то оно не зависит и от x_3.

Теперь используем из соотношений (5) и (11) равенство $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2 T_1(\boldsymbol{x}^*)) = 0$:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2 T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*} \boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \left| 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \right| \right\rangle =$$
$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 6}}^{7} \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_6}(-1) = 0.$$

Отсюда следует, что $T_1(x^*)$ не зависит и от x_6 (а также и от x_3, x_4, x_7).

Далее, используем последние два соотношения (11). В первую очередь берём более простое:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2^*} (\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2 T_1(\boldsymbol{x}^*)) = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}^*}^2 \boldsymbol{Y}_2^* \right\rangle =$$
$$= \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \left| 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{a_{52}}{x_3} \quad a_{61} \quad 0 \right| \right\rangle =$$
$$= \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2} \cdot 0 + \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_5} \cdot \frac{a_{52}}{x_3} = 0.$$

Отсюда следует, что $T_1(\boldsymbol{x})$ не зависит от x_5. Рассмотрим следующее соотношение:

$$\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1^*}(\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\,T_1(\boldsymbol{x}^*)) = 0 = \left\langle \frac{\partial T_1(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}, \boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^* \right\rangle.$$

Поскольку $T_1(\boldsymbol{x})$ может зависеть только от x_1 и x_2, а первая компонента производной $\boldsymbol{L}^2_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^*$ нулевая, то $T_1(\boldsymbol{x})$ не зависит от x_2, то есть $T_1(\boldsymbol{x}^*) \equiv T_1(x_1)$.

Непосредственная проверка неравенств (13) с помощью производных Ли $\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_1^*$ и $\boldsymbol{L}^3_{\boldsymbol{X}^*}\boldsymbol{Y}_2^*$ показывает, что неравенства выполняются.

Зная, что $T_1(\boldsymbol{x}^*) = z_1$ и зависит от x_1 можно предположить, что $z_1 = x_1$. При этом выполняются все соотношения (11) и (13). Из равенства $z_1 = x_1$ и соотношений (4) – (6) несложно получить соотношения, связывающие переменные z_2, z_3, z_4 линейной модели и переменные модели (2):

$$z_1 = x_1;$$

$$z_2 = a_{11}x_2;$$

$$z_3 = a_{11}(a_{27}x_1^3 + a_{26}x_1^2 + a_{25}x_1 + a_{24}x_2^2 + a_{23}x_2 + a_{22} + a_{21}x_3x_6);$$

$$z_4 = a_{11}^2x_2(3a_{27}x_1^2 + 2a_{26}x_1 + a_{25}) + a_{11}(a_{23} + 2a_{24}x_2)\cdot(a_{27}x_1^3 + a_{26}x_1^2 +$$
$$+ a_{25}x_1 + a_{24}x_2^2 + a_{23}x_2 + a_{22} + a_{21}x_3x_6) + a_{11}a_{21}x_3(x_7 + a_{61}x_6 + a_{62}x_2x_3) +$$
$$a_{11}a_{21}x_6(a_{31}x_3 + a_{32}x_4).$$

Аналогичным образом определяется функция $T_2(\boldsymbol{x}^*)$ и соотношения, связывающие переменные z_5, z_6 и z_7 линейной модели в форме Бруновского с переменными модели (2). Только при определении функции $T_2(\boldsymbol{x}^*)$ вместо соотношений (4) – (7) и (12), (13), которые применялись при определении функции преобразования $T_1(\boldsymbol{x}^*)$, используются выражения (8) – (10), (12) и (14).

Для проверки адекватности линейной модели объекта управления в форме Бруновского, сравнивались результаты моделирования объекта в различных его режимах работы, полученные с помощью исходной

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

модели (1) и линейной модели. Во всех экспериментах результаты моделирования с помощью двух различных моделей совпадали. В качестве примера на рис. 1 приведены кривые изменения скорости дизель-поезда при его разгоне до скорости 60 км/час, на ровном участке пути, Цифрой 1 на рис.1 обозначены результаты моделирования с помощью модели (1), а цифрой 2 – с помощью линейной модели в форме Бруновского. Результаты моделирования подтверждают эквивалентности полученной линейной модели в форме Бруновского исходной модели (1) объекта управления.

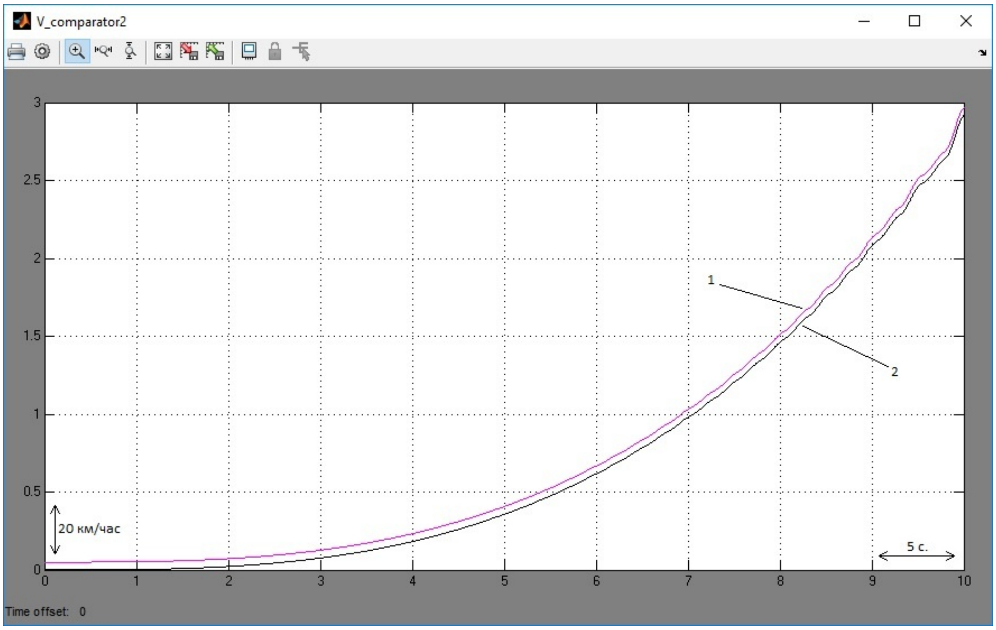

Рис. 1. Кривые изменения скорости дизель-поезда при его разгоне до 60 км/час. Кривая 1, получена с помощью исходной модели (1), а кривая 2 получена с помощью эквивалентной линейной модели в форме Бруновского. Поскольку кривые 1 и 2 совпадают и на рисунке они были бы неотличимы, то они искусственно сдвинуты по вертикали друг относительно друга.

Таким образом, приведённые рассчёты, связанные с получением эквивалентной линейной модели в форме Бруновского, показывают, что увеличение минимального числа одночленов в правых частях почти всех уравнений исходного объекта до двух-трёх (вместо одного-двух) не сказывается на роботоспособности ГТУ при получении эквивалентных линейных моделей в форме Бруновского. Разработанные программные компоненты позволяют не только расширить область применения ГТУ на

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

объекты, содержащие десятки уравнений, но и расширить ограничения, накладываемых на число одночленов в правых частях этих уравнений.

Раздел 2. Исследование по применению ГТУ к части уравнений объектов управления.

Применение ГТУ с целью приведения к форме Бруновского только части уравнений объекта управления может существенно уменьшить объём необходимых вычислений. Покажем это на примере объекта (1). Первое уравнение в системе (1) является линейным и соответствует форме Бруновского, поэтому исключим его из процесса линеаризации. С объектом линеаризации будут связаны следующие векторные поля:

$$\boldsymbol{X}^1(\boldsymbol{x}^1) = \begin{vmatrix} f_2 = a_{21}x_3x_5 + a_{22} + a_{23}x_2 + a_{24}x_2^2 + a_{25}x_1 + a_{26}x_1^2 + a_{27}x_1^3 \\ f_3 = a_{31}x_3 + a_{32}x_4 \\ f_4 = a_{41}x_4 + a_{42}x_3 \\ f_5 = a_{51}x_2 + a_{52}\dfrac{x_6}{x_3} \\ f_6 = a_{61}x_6 + a_{62}x_2x_3 \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_1^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{Y}_2^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}},$$

где $\boldsymbol{x}^1 = (x_2, x_3, ..., x_6)$.

Определяем возможность преобразования указанной нелинейной системы уравнений с полями $\boldsymbol{X}^1$, $\boldsymbol{Y}_1^1$, $\boldsymbol{Y}_2^1$ к линейной форме Бруновского. Для этого необходимо, чтобы последовательность распределений $\boldsymbol{M}^0$, $\boldsymbol{M}^1$ и $\boldsymbol{M}^2$ была инволютивна. Поскольку векторные поля $\boldsymbol{Y}_1^1$ и $\boldsymbol{Y}_2^1$ постоянны, то распределение $\boldsymbol{M}^0 = \mathrm{span}(\boldsymbol{Y}_1^1, \boldsymbol{Y}_2^1)$ инволютивно. Условие инволютивности распределения $\boldsymbol{M}^1$ не выполняется. Поэтому, необходимо вводить интегратор, введём его во второй канал, связанный с управлением $u_2 : u_2 = x_7$, $\dfrac{dx_7}{dt} = u_2^*$. В результате получим следующую систему уравнений:

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_3x_5 + a_{22} + a_{23}x_2 + a_{24}x_2^2 + a_{25}x_1 + a_{26}x_1^2 + a_{27}x_1^3;$$
$$\frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_3 + a_{32}x_4;$$
$$\frac{dx_4}{dt} = a_{41}x_4 + a_{42}x_3 + u_1^*;$$
$$\frac{dx_5}{dt} = a_{51}x_2 + a_{52}\frac{x_6}{x_3};$$
$$\frac{dx_6}{dt} = a_{61}x_6 + a_{62}x_2x_3 + x_7;$$
$$\frac{dx_7}{dt} = u_2^*,$$

где $u_1^* = u_1$.

С расширенной системой уравнений связаны векторные поля:

$$\boldsymbol{X}_1^1 = \begin{vmatrix} f_2 = a_{21}x_3x_5 + a_{22} + a_{23}x_2 + a_{24}x_2^2 + a_{25}x_1 + a_{26}x_1^2 + a_{27}x_1^3 \\ f_3 = a_{31}x_3 + a_{32}x_4 \\ f_4 = a_{41}x_4 + a_{42}x_3 \\ f_5 = a_{51}x_2 + a_{52}\dfrac{x_6}{x_3} \\ f_6 = a_{61}x_6 + a_{62}x_2x_3 + x_7 \\ f_7 = 0 \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_1^{1*} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{Y}_2^{1*} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Для расширенной модели объекта управления распределение $\boldsymbol{M}^0$ инволютивно, а для определения инволютивности распределения $\boldsymbol{M}^1$ необходимо вычислить производные Ли: $\boldsymbol{L}_{X_1^1}\boldsymbol{Y}_1^{1*}$, $\boldsymbol{L}_{X_1^1}\boldsymbol{Y}_2^{1*}$:

$$\boldsymbol{L}_{X_1^1}\boldsymbol{Y}_1^{1*} = [\boldsymbol{X}_1^1, \boldsymbol{Y}_1^{1*}] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_1^{1*}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{X}_1^1 - \frac{\partial \boldsymbol{X}_1^1}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1^{1*} = -\frac{\partial \boldsymbol{X}_1^1}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{Y}_1^{1*} =$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$
= -\begin{vmatrix} a_{25}+2a_{24}x_2 & a_{21}x_5 & 0 & 0 & a_{31}x_3 & 0 \\ 0 & a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{41} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & -\dfrac{a_{52}x_6}{x_3} & 0 & 0 & \dfrac{a_{52}}{x_3} & 0 \\ a_{62}x_3 & a_{62}x_2 & 0 & 0 & a_{61} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -a_{32} \\ -a_{41} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};
$$

$$
\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1^1} \boldsymbol{Y}_2^{1*} = [\boldsymbol{X}_1^1, \boldsymbol{Y}_2^{1*}] = \frac{\partial \boldsymbol{Y}_2^{1*}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{X}_1^1 - \frac{\partial \boldsymbol{X}_1^1}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{Y}_2^{1*} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}^{\mathrm{T}}.
$$

Поскольку все компоненты распределения $\boldsymbol{M}^1$ постоянны, то оно инволютивно.

Проверка распределения $\boldsymbol{M}^2$ на инволютивность, показывает, что оно инволютивно.

Из инволютивности вышеуказанных распределений следует, что система уравнений рассматриваемого объекта может быть приведена к канонической форме Бруновского, которая имеет две клетки с индексами управляемости $k_1 = k_2 = 3$:

$$
\frac{d\,q_k}{dt} = q_{k+1}, \quad k = 2, 3, 5, 6;
$$

$$
\frac{d\,q_4}{dt} = u_1^*, \ \frac{d\,q_7}{dt} = u_2^*. \tag{19}
$$

Для этой системы уравнений в форме Бруновского существуют функции преобразования $T_1^* = (x_2,\ x_3, \ldots,\ x_7)$ и $T_2^* = (x_2,\ x_3, \ldots,\ x_7)$, с помощью которых по аналогии с первым разделом статьи несложно определить связь между переменными исходной нелинейной модели и эквивалентной модели в форме Бруновского. Метод определения этих функций преобразования описан выше для линейной модели (3) и объекта управления (2). Поскольку в рассматриваемом случае получены две клетки Бруновского с индексами управляемости, равными трём, то объём вычислений в этом случае существенно меньше, поскольку нет необходимости определять инволютивность распределения $\boldsymbol{M}^3$, вычислять производные Ли третьего порядка и решать систему уравнений в частных производных более высокого порядка. Это позволяет сделать вывод, что применение ГТУ с целью приведения к форме Бруновского только части уравнений объекта управления может существенно уменьшить объём необходимых вычислений при получении эквивалентной линейной модели. В связи с этим в программное обеспечение бортовой вычислительной системы, обеспечивающее диалоговый режим работы необходимо включить программные компоненты, позволяющие выделять из полных моделей объекта его части, к которым возможно применение геометрической теории управления.

Выводы. Проведенные исследования, связанные с получение линейных моделей в форме Бруновского эквивалентных нелинейным моделям, показали, что существующие программные компоненты бортовой вычислительной системы позволяют не только расширить область применения ГТУ на объекты управления, описываемые десятками обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, но и ослабить ограничения, накладываемые на число одночленов в правых частях этих уравнений.

Исследование возможностей применения ГТУ только для части уравнений, описывающих нелинейный объект управления, показало, что такой подход может существенно уменьшить объем вычислений при поиске эквивалентных линейных моделей в форме Бруновского. Кроме того, такой подход расширяет и область применения ГТУ на объекты, преобразования математических моделей которых к нелинейной форме невозможно или трудоёмко. В связи с этим, в программное обеспечение бортовой вычислительной системы, обеспечивающее диалоговый режим работы, необходимо включить программные компоненты, обеспечивающие выделение из полных моделей подсистем дифференциальных уравнений, к которым эффективно применение средств ГТУ.

Список литературы:

1. *Краснощёченко В.Н.* Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / *В.И. Краснощёченко, А.П. Крищенко*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с.

2. *Kim D.P.* Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System / *D.P. Kim.* – Seal: Harnol, 2000. – 558 p.

3. *Дмитриенко В.Д.* Моделирование и оптимизация процессов управления движением дизель-поездов / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный.* – Харьков: НТМТ, 2013. – 248 с.

4. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2 Многомерные нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: учебное пособие / *Д.П. Ким*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

5. *Дмитриенко В.Д.* Преобразование нелинейных систем управления к эквивалентным линейным в канонической форме Бруновского / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный* // Электротехнические системы и комплексы. – Магнитогорск: МГТУ, 2014. – № 4 (25). – С. 8 – 14.

6. *Аграчев, А.А.* Геометрическая теория управления / *А.А. Аграчев*. – М.: Физматлит, 2005. – 392 с.

7. *Блох А.М.* Введение в аспекты теории геометрического управления / Механика и управление. Междисциплинарная прикладная математика, том 24. Спрингер, Нью Йорк, 2015. – С. 199-233.
8. *Сачков Ю*. Геометрическая теория управления / *Ю. Сачков*. – М.: СИНТЕГ, 2013. – 394 с.
9. *Зоефельд, Джеффри А.*, Теория геометрического управления: нелинейная динамика и приложения. Университет штата Сан-Хосе, 2016. – 150 с.
10. *Дмитриенко В.Д.* Линеаризация математической модели, описывающей процессы управления подвижным совставом, методами дифференциальной геометрии / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный, Д.М. Главчев* // Вісник НТУ "ХПІ". – Харків: НТУ "ХПІ", 2017. – Вип. 21 (1243). – С. 38-53.
11. *Заковоротный А. Ю.* Синтез автоматизированной системы управления подвижным составом на основе геометрической теории управления и нейронных сетей: дис. ... д-ра техн. наук: спец. 05.13.07 / *Александр Юрьевич Заковоротный*; Нац. техн. ун-т "Харьков. политехн. ин-т". – Харьков, 2017. – 433 с.

References:
1. Krasnoshechenko, V.N., and Krishenko, A.P. (2005), *Nonlinear systems: geometrical method of analysis and synthesis*, Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moskow, 520 p.
2. Kim, D.P. (2000), *Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System*, Harnol, Seal: 558 p.
3. Dmitrienko, V.D., and Zakovorotny, A.Y. (2013), *Modelling and optimization of management processes of diesel trains*, HTMT, Kharkiv, 248 p.
4. Kim, D.P. (2004), *Theory of automatic control. T. 2 Multidimensional nonlinear, optimal and adaptive systems*, FYSMATLIT, Moskow, 464 p.
5. Dmitrienko, V.D., and Zakovorotny, A.Y. (2014), "Converting the nonlinear control systems equivalent to the linear canonical Brunovsky form", *Electrical systems and complexes*, MSTU, Magnitogorsk; No 4 (25), pp. 8-14.
6. Agrachev, A.A. (2005), *Geometric control theory. Agrachev*, Fizmatlit, Moscow, 392 p.
7. Bloch, A.M. (2015) "An Introduction to Aspects of Geometric Control Theory", *Nonholonomic Mechanics and Control. Interdisciplinary Applied Mathematics*", Vol 24. Springer, New York, pp. 199-233.
8. Sachkov, Y. (2013), *Geometric control theory*, SYNTEG, Moscow, 394 p.
9. Zoehfeld, Geoffrey, A. (2016), *Geometric Control Theory: Nonlinear Dynamics and Applications*, University of San Jose, Master's Theses, 150 p.
10. Dmitrienko, V.D., Zakavorotny, A.Yu., and Glavchev D.M. (2017), "Linearization of a mathematical model describing the processes of control of a rolling stock, methods of differential geometry", *Herald of NTU "KhPI"*, NTU "KhPI", Kharkiv, No. 21 (1243), pp. 38-53.
11. Zakovorotny, A.Y. (2017), Synthesis of an automated control system for rolling stock on the basis of geometric control theory and neural networks [Electronic resource]: dis. ... Dr. techn. Sciences: spec. 05.13.07, Alexander Yuryevich Zakovorotny; NTU "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov, 433 p.

Статью представил д-р техн. наук, проф. НТУ "ХПИ" Серков А.А.

Поступила (received) 29.04.2018

Dmitrienko Valerii, Dr. Tech. Sci., Professor
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel.: +38 (057) 707-61-98, e-mail: valdmitrienko@gmail.com
ORCID ID: 0000-0003-2523-595X

Zakovorotniy Alexandr, Dr. Tech. Sci., Docent
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel.: +38 (097) 967-32-71, e-mail: arcade@i.ua
ORCID ID: 0000-0003-4415-838X

Mezentsev Nickolay, Cand. Tech. Sci., Docent
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel.: +38 (098) 859-88-98, e-mail: besitzer@i.ua
ORCID ID: 0000-0001-7834-2797

Dmytro Hlavchev, master
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel: +380993049807, e-mail: dmitriyglavchev@gmail.com
ORCID ID: 0000-0003-4248-4819

УДК 861.5.015.2
Дослідження можливостей програмних компонент бортової обчислювальної системи при перетворенні нелінійних систем до еквівалентних лінійних / Дмитрієнко В.Д., Заковоротний О.Ю., Мезенцев Н.В., Главчев Д.М. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2018. – № 24 (1300). – С. 80 – 98.

Досліджуються можливості розширення області застосування геометричної теорії керування (ГТК). Показано, що застосування ГТК тільки для частини каналів управління об'єктом або для частини рівнянь, що описують об'єкт, може істотно зменшити обсяг обчислень при пошуку еквівалентних лінійних моделей в формі Бруновського для нелінійних афінних систем з векторним керуванням в просторі "вхід-стан". Іл.: 1. Бібліогр .: 11 назв.

Ключові слова: геометрична теорія керування; еквівалентні лінійні моделі; форма Бруновського; простір "вхід-стан".

УДК 861.5.015.2
Исследование возможностей программных компонент бортовой вычислительной системы при преобразовании нелинейных систем к эквивалентным линейным / Дмитриенко В.Д., Заковоротный А.Ю., Мезенцев Н.В., Главчев Д.М. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2018. – № 24 (1300). – С. 80 – 98.

Исследуются возможности расширения области применения геометрической теории управления (ГТУ). Показано, что применение ГТУ только для части уравнений, описывающих объект, может существенно уменьшить объём вычислений при поиске эквивалентных линейных моделей в форме Бруновского для нелинейных аффинных систем с векторным управлением в пространстве "вход-состояние". Ил.: 1. Библиогр.: 11 назв.

Ключевые слова: геометрическая теория управления; эквивалентные линейные модели; форма Бруновского; пространство "вход-состояние".

UDK 861.5.015.2
Investigation of the capabilities of software components of an on-board computer system in the transformation of nonlinear systems to equivalent linear / Dmitrienko V.D., Zakovorotny A.Y., Mezentsev N.V., Hlavchev D.M. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modeling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2018. – № 24 (1300). – P. 80 – 98.

The possibilities of expanding the scope of the geometric control theory (GCT) are being investigated. The article shows that the use of GCT only for part of the control channels of the object or for part of the equations describing the object can significantly reduce the amount of computation when searching for equivalent linear models in the form of Brunovsky for nonlinear affine systems with vector control in the input-state space. Figs.: 1. Refs.: 11 titles.

Keywords: geometric control theory; equivalent linear models; the form of Brunovsky; space "input-state".