ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

УДК 004.9 **DOI: 10.20998/2411-0558.2019.13.06**

В. Д. ДМИТРИЕНКО, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПИ",
А. Ю. ЗАКОВОРОТНЫЙ, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПИ",
С. Ю. ЛЕОНОВ, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПИ",
Д. М. ГЛАВЧЕВ, асп., НТУ "ХПИ"

ПРОГРАММНАЯ КОМПОНЕНТА ДЛЯ ПОИСКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ГТУ МЕТОДОМ ГРУППОВОГО УЧЕТА АРГУМЕНТОВ

В геометрической теории управления (ГТУ) модели объектов управления, описываемые системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, преобразовываются в эквивалентные линейные модели в форме Бруновского. Затем с помощью линейных моделей определяют оптимальные законы управления линейными объектами, а потом с помощью специальных преобразований переносят эти законы управления на модели исходных нелинейных объектов. Для определения функций преобразования (ФП), связывающих переменные линейных и нелинейных моделей необходимо решать системы дифференциальных уравнений в частных производных. Поскольку универсальных методов решения таких систем уравнений нет, то предложен метод поиска ФП на основе многорядного алгоритма МГУА. Проверка предложенного метода при решении ряда задач с помощью ГТУ подтвердила его работоспособность. Ил.: 1. Библиогр.: 14 назв.

Ключевые слова: геометрическая теория управления; многорядный алгоритм МГУА; функция преобразования; система дифференциальных уравнений в частных производных.

Постановка проблемы и анализ литературы. Многорядные алгоритмы метода группового учета аргументов относятся к биоинспированным алгоритмам, то есть к алгоритмам, основанным на идеях эволюции и самоорганизации живых организмов, и успешно применяются для решения различных задач в многомерных и многоэкстремальных пространствах в условиях существенной априорной неопределенности [1 – 6]. Алгоритмы МГУА используются как для синтеза разнообразных математических моделей, так и для поиска приемлемых решений с помощью уже имеющихся сложных моделей, например, когда объект или процесс описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных. Одна из таких задач возникает в геометрической теории управления [7 – 11], которая позволяет модели объектов управления, описываемые системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, преобразовывать в эквивалентные линейные модели в форме Бруновского. Затем с помощью линейных моделей и хорошо

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

разработанной теории управления линейными объектами определять оптимальные законы управления линейными объектами, а потом с помощью специальных преобразований переносить эти законы управления на модели исходных нелинейных объектов. Для определения функций преобразования, связывающих переменные линейной модели в форме Бруновского с переменными исходного нелинейного объекта, необходимо решать системы дифференциальных уравнений в частных производных при ограничениях в виде дифференциальных неравенств [7]. Решение этой системы уравнений в общем случае не является тривиальной задачей. При этом, сложность ее решения существенно зависит от сложности правых частей дифференциальных уравнений, описывающих исходный нелинейный объект управления [7, 12 – 13]. В связи с этим авторы, использующие ГТУ, стремятся описать исходный объект таким образом, чтобы правые части дифференциальных уравнений содержали минимальное число одночленов – один или два одночлена, и только потом модель преобразовывается к линейной форме Бруновского.

Как правило, в этом случае удается определять функции преобразования (ФП) как функции одной переменной путем последовательного исключения из общего выражения ФП $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ всех аргументов кроме одного [9, 10]. Если же правые части обыкновенных дифференциальных уравнений исходного нелинейного объекта содержат более двух одночленов, то процесс определения ФП усложняется. В работе [14] предложен автоматический перебор ФП с помощью специализированной нейронной сети, которая используется для определения ФП.

Однако необходимость моделирования нейронной сети повышает трудоемкость поиска решения и, кроме того, накладывает определенные ограничения на математические модели объектов управления. Поэтому используем другой подход к решению системы уравнений в частных производных – многорядный алгоритм МГУА.

Целью статьи является разработка многорядного алгоритма МГУА для поиска функций преобразования, связывающих переменные в линейных и нелинейных моделях геометрической теории управления.

Рассмотрим многорядный алгоритм МГУА на примере его применения в ГТУ.

Как известно, число определяемых ФП зависит от числа управлений в исходном объекте [7 – 9]. В качестве примера рассмотрим объект с двумя управлениями:

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_2 = g_1;\\
&\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_3x_5 + a_{22} + a_{23}x_2 + a_{24}x_2^2 + a_{25}x_1 + a_{26}x_1^2 + a_{27}x_1^3 = g_2;\\
&\frac{dx_3}{dt} = a_{31}x_3 + a_{32}x_4 = g_3;\\
&\frac{dx_4}{dt} = a_{41}x_4 + a_{42}x_3 + a_{43}x_2x_6 + u_1 = g_4 + u_1;\\
&\frac{dx_5}{dt} = a_{51}x_2 + a_{52}\frac{x_6}{x_3} = g_5;\\
&\frac{dx_6}{dt} = a_{61}x_6 + a_{62}x_2x_3 + x_7 = g_6;\\
&\frac{dx_7}{dt} = g_7 + u_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_7$ – переменные объекта управления; $a_{11}, a_{21,}, \ldots, a_{62}$ – постоянные коэффициенты.

С системой уравнений (1) связаны векторные поля:

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 = 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_7$.

Проверка инволютивности распределений:

$$\boldsymbol{M}^0 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2\},\ \boldsymbol{M}^1 = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{L}_X\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{L}_X\boldsymbol{Y}_2\},$$

$$\boldsymbol{M}^2_{\boldsymbol{Y}_1} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{L}_X\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{L}^2_X\boldsymbol{Y}_2\},\ \boldsymbol{M}^2_{\boldsymbol{Y}_2} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{L}_X\boldsymbol{Y}_2, \boldsymbol{L}^2_X\boldsymbol{Y}_2\},$$

$$\boldsymbol{M}^3_{\boldsymbol{Y}_1},\ \boldsymbol{M}^3_{\boldsymbol{Y}_2}$$

показала, что система уравнений (1) может быть преобразована к линейному виду в форме Бруновского:

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$\begin{aligned} &\frac{dz_i}{dt} = z_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, 5, 6; \\ &\frac{dz_4}{dt} = u_1, \ \frac{dz_7}{dt} = u_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\operatorname{span}\{\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2\}$ – линейная оболочка векторов $\boldsymbol{Y}_1$ і $\boldsymbol{Y}_2$; $\boldsymbol{L_X Y}_1$, $\boldsymbol{L_X Y}_2$ – производные Ли соответствующих векторов вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$; $\boldsymbol{L}_X^2 \boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{L}_X^2 \boldsymbol{Y}_2$ – производные Ли второго порядка соответственно векторов $\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_2$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}$.

Для системы уравнений (3) существуют преобразования $z_1 = T_1(\boldsymbol{x}) = T_1(x_1, x_2, \dots, x_7)$ и $z_5 = T_2(\boldsymbol{x}) = T_2(x_1, x_2, \dots, x_7)$, с помощью которых, выполняя дифференцирование функций $T_k(\boldsymbol{x})$, $k = 1, 2$ вдоль векторного поля $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X} + u_1 \boldsymbol{Y}_1 + u_2 \boldsymbol{Y}_2$, можно определить z_p, $p = \overline{2, 7}$:

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1} T_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L_X} T_1(\boldsymbol{x}) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_1(\boldsymbol{x}) + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_1(\boldsymbol{x}); \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_2}{dt} = z_3 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L_X} T_1(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 (T_1(\boldsymbol{x})) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L_X} T_1(\boldsymbol{x})) + \\ + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L_X} T_1(\boldsymbol{x})); \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_3}{dt} = z_4 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_1(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 (T_1(\boldsymbol{x})) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_1(\boldsymbol{x})) + \\ + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_1(\boldsymbol{x})); \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_4}{dt} = u_1 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 T_1(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^4 (T_1(\boldsymbol{x})) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 T_1(\boldsymbol{x})) + \\ + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 T_1(\boldsymbol{x})); \end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{dz_5}{dt} = z_6 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1} T_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L_X} T_2(\boldsymbol{x}) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_1(\boldsymbol{x}) + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_2(\boldsymbol{x}); \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_6}{dt} = z_7 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L_X} T_2(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 (T_2(\boldsymbol{x})) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L_X} T_1(\boldsymbol{x})) + \\ + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L_X} T_2(\boldsymbol{x})); \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_7}{dt} = u_2 = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_2(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 (T_2(\boldsymbol{x})) + u_1 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_2(\boldsymbol{x})) + \\ + u_2 \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_2(\boldsymbol{x})); \end{aligned} \tag{10}$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

где $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}_1} T_k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}} T_k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_k(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_k(\boldsymbol{x})$, $k=1,2$ – производные Ли функций $T_k(\boldsymbol{x})$ вдоль векторных полей $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_2$; $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}}^m$ – кратные производные Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{G}$ $(\boldsymbol{G}=\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2)$, $m=2,3$.

Из системы уравнений в форме Бруновского (3) следует, что переменные z_1, z_2, z_3, z_5 и z_6 не зависят от управлений u_1 и u_2. Исходя из этого, следует что в выражениях (4) – (6), (8), (9) коэффициенты при управлениях u_1 и u_2 равны нулю:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}} T_1(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}} T_1(\boldsymbol{x})) =\\ = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_1(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_1(\boldsymbol{x})) = 0;\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1} T_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2} T_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}} T_2(\boldsymbol{x})) =\\ = \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}} T_2(\boldsymbol{x})) = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

При этом коэффициенты при управлениях u_1 и u_2 в уравнениях (7) и (10) не равны нулю:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 T_1(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 Y_1 \right\rangle \neq 0;\\ \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 T_1(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_1}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^3 Y_2 \right\rangle \neq 0;\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_1}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_2(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 \boldsymbol{Y}_1 \right\rangle \neq 0;\\ \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{Y}_2}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 T_2(\boldsymbol{x})) = \left\langle \frac{\partial T_2}{\partial \boldsymbol{x}}, \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{X}}^2 \boldsymbol{Y}_2 \right\rangle \neq 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Соотношения (11) – (14) в компактной форме описывают 10 дифференциальных уравнений в частных производных и четыре дифференциальных неравенства, с помощью которых можно определить функции преобразования $T_1(\boldsymbol{x})$ и $T_2(\boldsymbol{x})$. Эти функции в общем случае могут зависеть от семи компонент вектора $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_7)$.

Опыт применения ГТУ показывает, что функции преобразования обычно имеют простой вид, например:

$$T_i(x) = x_{g1}, \quad i=\overline{1,2}; \tag{15}$$

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

$$T_i(x) = x_{g1} + x_{g2}, \quad i = \overline{1, 2}; \tag{16}$$

. . . .

$$T_i(x) = \sum_{l=1}^{k} x_{gl}, \quad i = \overline{1, 2}, \tag{17}$$

где $x_{g1}, x_{g2}, \ldots, x_{gk} \in M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $g_1, g_2, \ldots, g_k = \overline{1, n}$, $g_1 \neq g_2 \neq \ldots, \neq g_k$; M – множество переменных исходного нелинейного объекта.

Теперь поясним функционирование многорядного алгоритма МГУА (рис.) при поиске функции преобразования $T_i(\boldsymbol{x})$ для одной из двух клеток Бруновского [7 – 10]. На рисунке в блоках 1 и 2 используются обозначения А и Б.

А: В начале работы алгоритма:

Задание i номера клетки Бруновского. Задание исходных данных для определения ФП для i-й клетки Бруновского. Задание начального множества аргументов $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ для i-й клетки.

В процессе работы алгоритма – исключение аргументов из множества M. Задание новой клетки Бруновского и исходных данных для нее.

Б: Формирование ФП (частных описаний) с помощью соотношений (15) – (17) многорядного алгоритма МГУА.

Поиск ФП $T_i(\boldsymbol{x})$ для конкретной клетки Бруновского начинается с наиболее простых функций вида (15). При этом задается исходное множество M возможных аргументов ФП. Перебор аргументов в блоке 1 может осуществляться в любом порядке, для определенности положим, что аргументы проверяются в следующем порядке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вначале для первой ФП $T_1(\boldsymbol{x}) = x_1$, связывающей переменные линейной и нелинейной моделей для первой клетки Бруновского.

В блоке 2 формируются частные описания (16), (17) на втором и последующих рядах селекции. На первом ряду селекции одночленные частные описания из блока 1 через блок 2 передаются в блок 3.

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

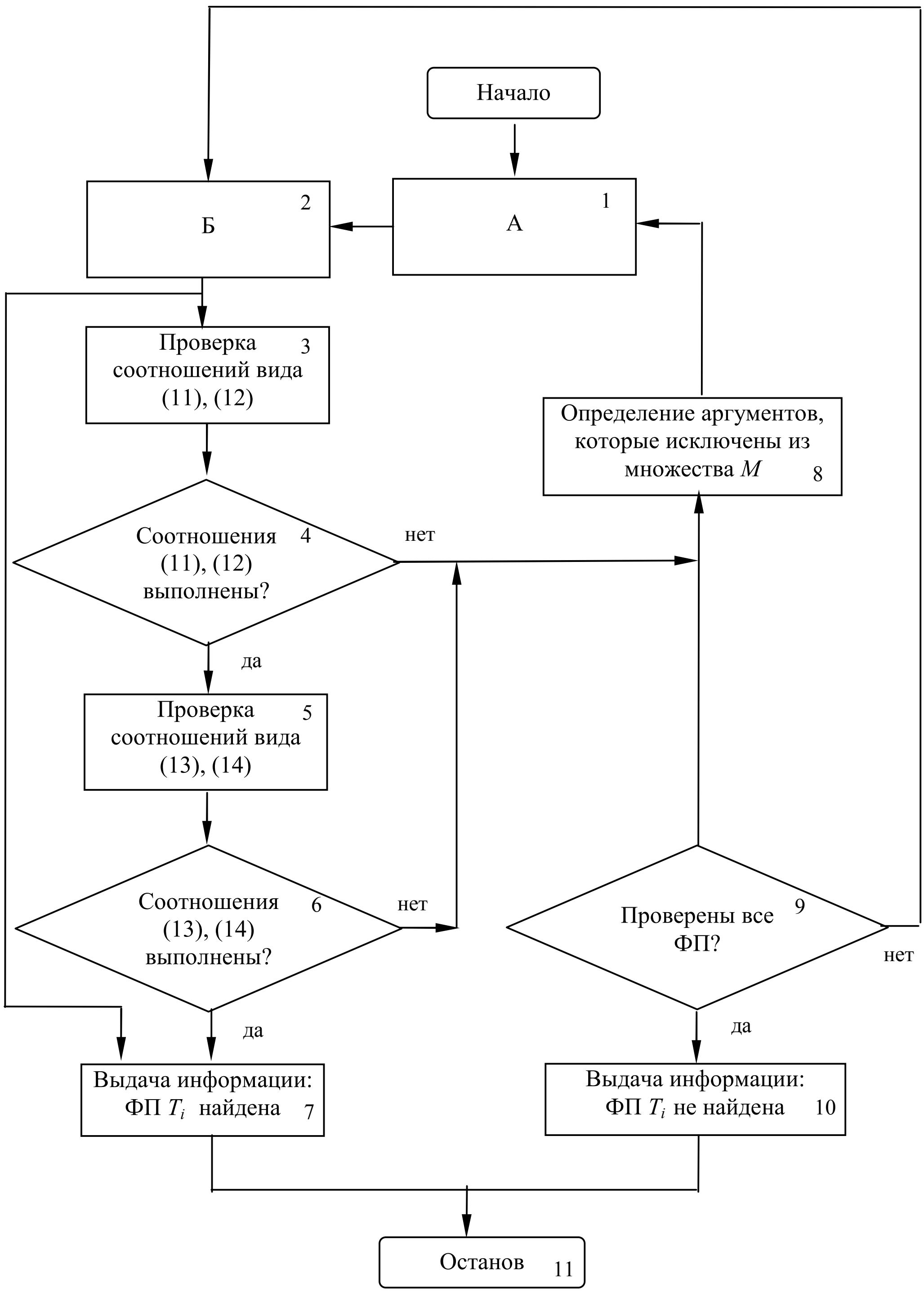

Рис. Обобщенный многорядный алгоритм МГУА для поиска ФП

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Поскольку определяется ФП T_1, то с помощью блока 3 алгоритма формируются и проверяются соотношения (11). Если не все соотношения вида (11) выполняются, то это означает, что текущая ФП $T_1(\boldsymbol{x}) = x_1$ не является искомым решением. Поэтому с помощью блока 8 определяется, что текущий аргумент x_1 (в общем случае аргумент x_j, $j = \overline{1, n}$ при проверке одночленных функций преобразования T_{1j} ($j = \overline{1, n}$)) должен быть исключен из множества *M* в блоке 1 алгоритма. С помощью блока 9 проверяется условие окончания перебора всех ФП при поиске функции T_1. Поскольку анализируется только первая возможная функция преобразования для первой клетки Бруновского, сигнал с выхода блока 9 поступает на вход блока 2, где выбирается следующая возможная функция преобразования для первой клетки Бруновского, а затем блок 3 выолняет прверку соотношений (11) и т.д. Если в блоке 9 определяется, что проверены все ФП для данной клетки Бруновского, то с помощью блока 10 алгоритма выдается информация, что ФП для данной клетки не найдена (блок 10) и алгоритм прекращает свою работу (блок 11).

Если с помощью блока 4 устанавливается, что соотношения (11) для первой клетки Бруновского выполнены, то затем проверяются неравенства (13) в блоке 5. Если хотя бы одно из соотношений (13) не выполняется, то это означает, что текущая ФП не является искомым решением. Соответствующая информация с выхода блока 6 подается на входы блоков 8 и 9, функционирование которых описано выше. Если неравенства (13) выполняются, то блок 6 выдает информацию о найденной ФП, данные о которой поступают в блок 7 с выхода блока 2. Затем алгоритм прекращает свою работу (блок 11). Зная ФП $T_1(\boldsymbol{x}) = z_1$, с помощью соотношений (4) – (7) путем последовательного дифференцирования вдоль векторного поля X можно определить и переменные z_2, z_3 и z_4.

После этого может быть определена ФП $T_2(\boldsymbol{x})$ для второй клетки Бруновского. Для определения этой ФП необходимо изменить исходные данные в блоках 1 и 2, а в блоках 3 и 4 использовать вместо уравнений (11) соотношения (12), аналогично – в блоках 5 и 6 вместо неравенств (13) проверять выполнение неравенств (14).

Этот алгоритм поиска ФП для объектов с двумя каналами управления можно обобщить и на случай объектов управлений с m каналами управлений, когда необходимо определять не две, а m ФП: $T_i(\boldsymbol{x})$, $i = \overline{1, m}$. В этом случае для каждой функции преобразования будут получены свои соотношения вида (11), (12) и неравенства вида (13), (14),

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

которые будут использоваться для поиска ФП для всех клеток Бруновского аналогично тому, как использовались соотношения (11) – (14) при поиске функций $T_1(\boldsymbol{x})$ и $T_2(\boldsymbol{x})$.

Если многорядный алгоритм МГУА с помощью соотношений вида (15) – (17) не позволяет получить функцию преобразования, а правые части обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающие исходный объект управления, содержат выражения, отличные от одночленов полиномов, то выражения (15) – (17) должны быть скорректированы с учетом этой дополнительной информации.

Выводы. На основе анализа метода определения функций преобразования, связывающих переменные линейных и нелинейных моделей в ГТУ, путем решения системы дифференциальных уравнений в частных производных при ограничениях в виде дифференциальных неравенств, можно сделать вывод, что решение этой системы уравнений в общем случае не является тривиальной задачей. В настоящее время эта система уравнений решается только в том случае, когда система обыкновенных дифференциальных уравнений исходного нелинейного объекта управления содержит в своих правых частях почти всех дифференциальных уравнений не более одного – двух одночленов. При увеличении сложности правых частей дифференциальных уравнений модели исходного объекта известный метод последовательного исключения переменных из функций преобразования, как правило, не работает. В связи с этим необходима разработка новых методов решения системы уравнений в частных производных. В качестве такого метода предлагается многорядный алгоритм метода группового учета аргументов, основанный на переборе возможных решений системы уравнений в частных производных с помощью соотношений вида (15) – (17). Проверка нового метода решения систем уравнений в частных производных при использховании ГТУ для решения различных задач управления подтвердила его работоспособность.

Если правые части обыкновенных дифференциальных уравнений исходного нелинейного объекта управления содержат одночлены, отличные от одночленов полиномов, например, вида: x_i / x_j; $x_i / x_j x_k$, $x_i /(x_j + x_k)$, $\sqrt{x_j}$, $\sqrt{x_j + x_k}$, и т.д., где $x_i, x_j, x_k \in M$, $i, j, k = \overline{1, n}$, $i \neq j \neq k$, то исходное множество $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ должно быть расширено за счет этих одночленов $M^* = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_i / x_j, x_i / x_j x_k, x_i /(x_j + x_k), \ldots\}$ и выражения (15) – (17) должны быть скорректированы с учетом дополнительной информации.

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

Список литературы:
1. *Ивахненко А.Г.* Помехоустойчивость моделирования / *А.Г. Ивахненко, В.С. Степашко*. – Киев: Наукова думка, 1981. – 206 с.
2. *Malada H.R.* Inductive learning algorithms for comple systems modeling / *H.R. Malada, A.G. Ivakhnenko*. – CRC Press, 1994. – 368 p.
3. *Дмитриенко В.Д.* Алгоритмы самоорганизации и *K*-значные динамические модели / *В.Д. Дмитриенко, Н.И. Корсунов, С.Ю. Леонов, И.М.И. Шехабат*. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – 346 с.
4. *Понятский В.М.* Использование метода группового учета аргументов для выбора структуры модели динамического объекта / *В.М. Понятский, С.И. Велешкин, А.В. Жирнова* // Известия ТулГУ. Технические науки, Вып. 2. Управление, вычислительная техника и информационные технологии. – Тула: ТулГУ, 2013. – С. 55-66.
5. *Муравина О.М.* Программная реализация метода группового учета аргумнтов при идентификационном моделировании геолого-геофизических данных / *О.М. Муравина, И.А. Пономаренко* // Вестник ВГУ. Серия: Геология, 2016. – № 2. – С. 107-110.
6. *Баласанян С.Ш.* Сравнительный анализ методов регрессии и метода группового учета аргументов при моделировании процессов переработки полезных ископаемых / *С.Ш. Баласанян, Э.М. Геворкян* // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2016. – Т. 327. – № 4. – С. 23-34.
7. *Краснощёченко В.Н.* Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / *В.И. Краснощёченко, А.П. Крищенко*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с.
8. *Kim D.P.* Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System / *D.P. Kim.* – Seal: Harnol, 2000. – 558 p.
9. *Дмитриенко В.Д.* Моделирование и оптимизация процессов управления движением дизель-поездов / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный.* – Харьков: НТМТ, 2013. – 248 с.
10. *Дмитриенко В.Д.* Преобразование нелинейных систем управления к эквивалентным линейным в канонической форме Бруновского / *В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный* // Электротехнические системы и комплексы. – Магнитогорск: МГТУ, 2014. – № 4 (25). – С. 8 – 14.
11. Сачков Ю. Геометрическая теория управления / *Ю. Сачков*. – М.: СИНТЕГ, 2013. – 294 с.
12. *Bloch A.M.* An Introduction to Aspects of Geometric Control Theory / *A.M. Bloch*. – Nonholonomic Mechanics and Control Interdisciplinary Applied Mathematics. – Vol. 24. – Springer, New York. – P. 199-233.
13. *Zoehfeld Geoffrey A.* Geometric Control Theory: Nonline- ar Dynamics and Applications / *Geoffrey A. Zoehfeld*. – University of San Jose, Master's Theses. – 150 p.
14. *Дмитриенко В.Д.* Метод поиска функций преобразования, связывающих переменные нелинейных и линейных моделей в ГТУ / *Дмитриенко В.Д., А.Ю. Заковоротный, Д.М. Главчев* // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2016. – № 44 (1216). – С. 14-30.

References:
1. Ivakhnenko, A.G., and Stepashko, V.S. (1981), *Immunity of simulation*, Kiev, Naukova Dumka, 206 p.
2. Malada, H.R., and Ivakhnenko, A.G. (1994), *Inductive learning algorithms for comple systems modeling,* CRC Press, 368 p.

ISSN 2079-0031 (Print) ISSN 2411-0558 (Online)

3. Dmitrienko, V.D., Korsunov, N.I., Leonov, S.Yu., and Shehabat, I.M.I. (1998), *Self-organization algorithms and K-value dynamic models*, Moskow, Science-Fizmatlit, 346 p.
4. Ponyatsky, V.M., Veleshkin, S.I., and Zhirnova A.V. (2013), "Using the grouh method of data handling to select the structure of a model of a dynamic object", *News of TulSU, Technical science, vol. 2. Management, computer engineering and information technology*. – Тула: TulSU, pp. 55-66.
5. Muravina, O.M., and Ponomarenko, I.A. (2016), "Software implementation of the group method of data handling during identification modeling of geological and geophysical data", *Bulletin of the Voronezh State University. Series: Geology*, No. 2, pp. 107-110.
6. Balasanyan, S.Sh., and Gevorgyan, E.M. (2016), "Comparative analysis of the methods of re-grading and the group method of data handling in modeling the processes of mineral processing", *News of Tomsk Polytechnic University. Geo-Resource Engineering*, Vol 327, No. 4, pp. 23-34.
7. Krasnoshechenko, V.N., and Krishenko, A.P. (2005), *Nonlinear systems: geometrical method of analysis and synthesis*, Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moskow, 520 p.
8. Kim, D.P. (2000), *Automatic Control. Theory Nonlinear and Multivariable System*, Harnol, Seal: 558 p.
9. Dmitrienko, V.D., and Zakovorotny, A.Y. (2013), *Modelling and optimization of management processes of diesel trains*, HTMT, Kharkiv, 248 p.
10. Dmitrienko, V.D., and Zakovorotny, A.Y. (2014), "Converting the nonlinear control systems equivalent to the linear canonical Brunovsky form", *Electrical systems and complexes*, MSTU, Magnitogorsk, No 4 (25), pp. 8-14.
11. Sachkov, Y. (2013), *Geometric control theory*, SYNTEG, Moscow, 394 p.
12. Bloch, A.M. (2015) "An Introduction to Aspects of Geometric Control Theory", *Nonholonomic Mechanics and Control. Interdisciplinary Applied Mathematics*", Vol 24. Springer, New York, pp. 199-233.
13. Zoehfeld, Geoffrey, A. (2016), *Geometric Control Theory: Nonlinear Dynamics and Applications*, University of San Jose, Master's Theses, 150 p.
14. Dmitrienko, V.D., Zakovorotny, A.Y. and Glavchev D.M. (2014), "Search method of conversion functions, linking the variables of linear and nonlinear models in the GTU", *Herald of NTU "KhPI"*, NTU "KhPI", Kharkiv, No. 44 (12163), pp. 14-20.

Статью представил д-р техн. наук, проф. НТУ "ХПИ", А.А. Серков

Поступила (received) 21.05.2019

Dmitrienko Valerii, Dr. Tech. Sci., Professor
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel.: +38 (057) 707-61-98, e-mail: valdmitrienko@gmail.com
ORCID ID: 0000-0003-2523-595X

Zakovorotniy Alexandr, Dr. Tech. Sci., Professor
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel.: +38 (097) 967-32-71, e-mail: arcade@i.ua
ORCID ID: 0000-0003-4415-838X

Leonov Sergey, Dr. Tech. Sci., Professor
National Technical University "Kharkiv Politechnical Institute"
Str. Kirpichova, 2, Kharkov, Ukraine, 61002
Tel.: (099) 911-911-3, e-mail: serleomail@gmail.com
ORCID ID 0000-0001-8139-0458

Dmytro Hlavchev, master
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"
Str. Kirpicheva, 2, Kharkiv, Ukraine, 61002
Tel: +380993049807, e-mail: dmitriyglavchev@gmail.com
ORCID ID: 0000-0003-4248-4819

УДК 004.9

Програмна компонента для пошуку рішень системи рівнянь в частинних похідних в ГТУ методом групового врахування аргументів / Дмитрієнко В.Д., Заковоротний О.Ю., Леонов С.Ю., Главчев Д.М. // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2019. – № 1. – С. 41 – 53.

У геометричній теорії управління (ГТУ) моделі об'єктів управління, які описуються системами нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, перетворюються в еквівалентні лінійні моделі в формі Бруновського. Потім за допомогою лінійних моделей визначають оптимальні закони керування лінійними об'єктами, а потім за допомогою спеціальних перетворень переносять ці закони управління на моделі вихідних нелінійних об'єктів. Для визначення функцій перетворення (ФП), що пов'язують змінні лінійних і нелінійних моделей необхідно вирішувати системи диференціальних рівнянь у частинних похідних. Оскільки універсальних методів вирішення таких систем рівнянь немає, то запропонований метод пошуку ФП на основі багаторядного алгоритму МГВА. Перевірка запропонованого методу при вирішенні ряду завдань за допомогою ГТУ підтвердила його працездатність. Іл.: 1. Бібліогр.: 14 назв.

Ключові слова: геометрична теорія управління; багаторядний алгоритм МГВА; функція перетворення; система диференціальних рівнянь в частинних похідних.

УДК 004.9

Программная компонента для поиска решений системы уравнений в частных производных в ГТУ методом группового учета аргументов / Дмитриенко В.Д., Заковоротный А.Ю., Леонов С.Ю., Главчев Д.М. // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2019. – № 1. – С. 41 – 53.

В геометрической теории управления (ГТУ) модели объектов управления, описываемые системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, преобразовываются в эквивалентные линейные модели в форме Бруновского. Затем с помощью линейных моделей определяют оптимальные законы управления линейными объектами, а потом с помощью специальных преобразований переносят эти законы управления на модели исходных нелинейных объектов. Для определения функций преобразования (ФП), связывающих переменные линейных и нелинейных моделей необходимо решать системы дифференциальных уравнений в частных производных. Поскольку универсальных методов решения таких систем уравнений нет, то предложен метод поиска ФП на основе многорядного алгоритма МГУА. Проверка предложенного метода при решении ряда задач с помощью ГТУ подтвердила его работоспособность. Ил.: 1. Библиогр.: 14 назв.

Ключевые слова: геометрическая теория управления; многорядный алгоритм МГУА; функция преобразования; система дифференциальных уравнений в частных производных.

UDK 004.9

Software component for finding solutions to a system of partial differential equations in GTU by the method of group accounting of arguments / Dmitrienko V.D., Zakovorotny A.Y., Leonov S.Yu., Hlavchev D.M. // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2019. – №.1. – С. 41 – 53.

In geometric control theory (GTU), models of control objects described by systems of nonlinear ordinary differential equations are converted into equivalent linear models in the Brunovsky form. Then, using linear models, they determine the optimal laws of control of linear objects, and then using special transformations transfer these control laws to models of the original nonlinear objects. To determine the transformation functions (FPs) connecting the variables of linear and nonlinear models, it is necessary to solve systems of differential equations in partial derivatives. Since there are no universal methods for solving such systems of equations, a method for searching for a phase transition based on the multi-row GMDH algorithm is proposed. Verification of the proposed method in solving a number of problems with the help of gas turbines confirmed its efficiency. Figs.: 1. Refs.: 14 titles.

Keywords: geometric control theory; pseudostratified GMDH algorithm; conversion function; system of partial differential equations