

УДК 004.272.2:519.63

DOI: 10.20998/2411-0558.2023.01.01

*О. А. ДМИТРИЄВА*<sup>1,2</sup>, д-р техн. наук, проф., <sup>1</sup>НТУУ "КПІ ім. І. Сікорського", Київ, Україна, <sup>2</sup>Інститут моделювання водно-екологічних систем університету Штутгарта, Німеччина

## МЕТОДИ КОМПОЗИЦІЇ РІЗНИЦЕВИХ АПРОКСИМАЦІЙ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У роботі досліджено методи композиції різницевих апроксимацій для формування одно- і багатокрокових паралельних різницевих схем заданого порядку, орієнтованих на чисельний розв'язок завдання Коші як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для еволюційних рівнянь з частинними похідними. Пропоновані дискретні апроксимації дозволяють варіювати порядок похибки, відходячи від максимально можливого на фіксованій множині вузлів, але забезпечуючи при цьому абсолютну або  $A$ - $\alpha$  стійкість чисельних розв'язань. Дослідження властивостей запропонованих матриць переходів, що пов'язують опорні і розрахункові точки, дозволяють визначити характер стійкості сформованих різницевих схем за початковими даними і за правими частинами. Автоматичне генерування стійких різницевих схем дозволяє враховувати топологію наявного процесорного поля, отже, з максимальною ефективністю використовувати наявний обчислювальний ресурс. Л.: 10. Бібліогр.: 18 назв.

**Ключові слова:** різницеві апроксимації; моделювання динамічних процесів; завдання Коші; блокові методи; порядок похибки; абсолютна стійкість;  $A$ - $\alpha$  стійкість.

**Вступ.** Сучасні фізичні проблеми призводять до математичних моделей, які не мають передових методів їх вирішення [1]. Такі моделі, зазвичай, носять еволюційний характер і включають диференціальні рівняння, як звичайні, так і з частинними похідними [2]. Причому досить часто динамічні процеси, за наявності у кожного з них своїх фізичних особливостей, описуються одними і тими ж рівняннями або їх системами [2, 3]. Одна й та сама математична модель може бути орієнтована на розв'язання різних фізичних завдань. З іншого боку, математична модель може багаторазово трансформуватися протягом чисельних експериментів, і ця перешкода потребує удосконалення побудованого алгоритму [2 – 4]. Тому стає надзвичайно важливо створювати обчислювальні алгоритми, використання яких дозволяє ефективно проводити чисельні експерименти. Це один із сучасних напрямів у математичному моделюванні, що сприяє розробці нових чисельних методів. Не можна не згадати ще й про такий аспект, як ефективна організація та реалізація обчислень. Основною особливістю отриманих у результаті дискретизації систем різницевих рівнянь, зазвичай, є висока розмірність. Тому, крім теоретичної

ефективності побудованих методів, необхідно враховувати ефективність обчислювальну, пов'язану з можливістю розпаралелювання побудованих алгоритмів, кількістю задіяних процесорів, особливостями топологічних характеристик процесорних полів. Саме тому в статті розглядаються питання розробки та обґрунтування стійких різницевих схем, які забезпечують заданий порядок апроксимації і орієнтовані на ефективну реалізацію у паралельних обчислювальних середовищах.

**Аналіз стану питання.** Процес побудови нових чисельних алгоритмів, як правило, базується на реалізації двох найбільш поширених послідовних етапів [2], які полягають у композиції дискретних (різницевих) апроксимацій рівнянь та перевірки апріорних якісних характеристик цих апроксимацій, в основному таких, як похибки апроксимації, стійкість, збіжність, та точність отриманих різницевих схем. Проблеми, пов'язані з реалізацією першого етапу, докладно розглянуті та обґрунтовані в роботах [5 – 7], де наведені різницеві схеми одно- та багатокрокових блокових методів [5], орієнтованих на розв'язання завдання Коші для звичайних диференціальних рівнянь. У роботі [6] запропоновані різницеві схеми методів типу Біккарта, які забезпечують, до того ж, можливість керування кроком інтегрування. Також у [7] розглянуто питання використання колокаційних різницевих схем при чисельному розв'язанні еволюційних рівнянь із частинними похідними.

Але слід зазначити, що перспективна різницева схема апроксимації вихідного рівняння не гарантує отримання якісних наближень. Значною проблемою може стати слабка стійкість та/або незначний порядок апроксимації композиційної схеми. Питання, пов'язані з аналізом точності і стійкості отриманої різницевої схеми, мають не тільки принципове теоретичне значення, але і є ключовими факторами в отриманні ефективних чисельних наближень, ґрунтуючись на зниженні похибки апроксимації. Аналіз стійкості вимагає дослідження апріорних оцінок розв'язання різницевого завдання у світлі наявних вхідних даних, тобто, необхідно проведення аналізу стійкості за початковими даними та за правою частиною [2, 8]. Основним результатом проведених у цьому напрямку досліджень є виділення підмножини стійких (абсолютно або  $A$ - $\alpha$ ) різницевих схем первинного сімейства.

Також далеко не тривіальним завданням є оцінювання помилок апроксимації. Усередині знайденої підмножини стійких схем визначаються схеми із заданою точністю, обсягом обчислень та іншими бажаними властивостями та параметрами [2, 6 – 8]. До основних завдань, які виникають на цьому етапі, слід віднести визначення досяжного порядку точності різницевої схеми для різних класів завдань, розробку

схем для вирішення широкого класу завдань з певною гарантованою точністю, побудову схем підвищеної точності у вужчих класах задач, формулювання загальних принципів побудови стійких різницевих схем із мінімальними показниками трудомісткості реалізації.

**Аналіз основних досягнень і літератури.** В останні роки з'явилася велика кількість робіт, присвячених оцінюванню порядків похибки та дослідження стійкості таких схем [9 – 13]. Багато робіт засновані на використанні спектральних підходів і включають певні обмеження в структурах операторів різниці, пов'язані з лінійністю [9], мірністю і типами рівнянь [10 – 11], розміщенням точок колокації [12]. Так, серед перерахованих, робота [13] обмежується оцінюванням лінійної стійкості однокрокових методів для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, а межі області стійкості визначаються лише за допомогою тесту Далквіста, що не є вичерпним. У [14] стійкість неявних різницевих схем для нелінійного рівняння Шредінгера досліджується з використанням підходу Кранка-Ніколсона, застосованого до схем лінеаризації на основі методів Ньютона і Пікара, але при цьому розкладання Тейлора в розрахункових точках здійснюється без нелінійного члена, сприймається як стала, що справедливо лише у окремих випадках і підлягає узагальненню для інших типів рівнянь. У роботі [15] стійкість отриманої кінцево-різницевої схеми досліджується з урахуванням властивостей норми матриці і теорем Гершгоріна. Отримана при цьому система нерівностей, яка обмежує величини кроків інтегрування як за часом, так і за простором, не просто робить цю схему умовно стійкою, а й суттєво залежить від додаткових параметрів. Зважаючи на численні дослідження у зазначених напрямках можна стверджувати, що питання розробки, визначення характеру стійкості та порядків апроксимації різницевих схем залишаються актуальними та вимагають залучення нових підходів та рішень з урахуванням сучасних запитів на забезпечення об'єктивних результатів чисельного моделювання з прийнятними часовими показниками.

У роботах [5 – 7, 16, 17] розглянуті нові класи різницевих схем, орієнтованих на використання в паралельних обчислювальних системах з можливістю визначення шуканих значень відразу в декількох розрахункових точках блоку. При цьому композиції дискретних апроксимацій рівнянь можуть використовувати одну (рис. 1) або кілька (рис. 2) опорних точок з попереднього (попередніх) блоку [6, 7], в розрахункові схеми можуть вводитися похідні старших порядків та/або точки колокації [15]. Як правило, ці методи мають абсолютну або А- $\alpha$  стійкість зі значеннями кутів  $\alpha$ , близькими до  $90^\circ$  [6]. Але основною

проблемою використання паралельних реалізацій таких методів є необхідність їх адаптації під топологію процесорного поля. Ця проблема ускладнюється, коли на етапі чисельного експерименту виникає необхідність керування кроком інтегрування з використанням схем розтягування-стиснення [5], вкладеності чи екстраполяції Річардсона. У цьому випадку кількість задіяних процесорів може значно зростати, тоді як процеси адаптації методу під наявну конфігурацію процесорного поля не задіяні. Тобто необхідно швидко генерувати (або використовувати готовий) різницевий метод (методи), щоб з максимальною ефективністю використовувати наявний обчислювальний ресурс. Але при цьому можуть виникати ситуації, коли згенерований метод виявляється нестійким або не забезпечує заданого порядку точності. У [16] було розглянуто питання розробки паралельних різницевоїх схем за допомогою інтегро-інтерполяційного підходу. Такі різницеві схеми забезпечують дискретизацію диференціальних рівнянь чи їх систем зі сконцентрованими та розподіленими параметрами. Але при цьому формування множини розрахункових коефіцієнтів з орієнтацією на максимально досяжний порядок точності може призводити до нестійкості. Знизити порядок апроксимації на фіксованій множині опорних і розрахункових точок інтегро-інтерполяційний підхід не дозволяє, а зміна співвідношення розмірностей блоків призводить до нової різницевої схеми, яка також не дає гарантованої стійкості.

**Метою** цієї статті є розробка та обґрунтування методів генерації розрахункових коефіцієнтів стійких за початковими даними і за правою частиною різницевоїх схем, що забезпечують заданий порядок апроксимації без зміни розмірностей розрахункових та опорних блоків.

### **Композиція різницевоїх апроксимацій однокрокових блокових методів**

Розглянемо завдання Коші для звичайного диференційного рівняння

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

яке могло бути заданим спочатку, або до нього було зведено початкове завдання з частинними похідними, наприклад, методом прямих [7].

Позначимо  $u_{n,0}$  наближене значення розв'язання завдання Коші (1) у початковій точці  $t_{n,0}$  блоку, що обробляється. Передбачається, що в межах одного блоку точки сітки знаходяться на рівних відстанях  $\tau$  (рис.1)

$$t_{n,i} = t_{n,0} + i\tau, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

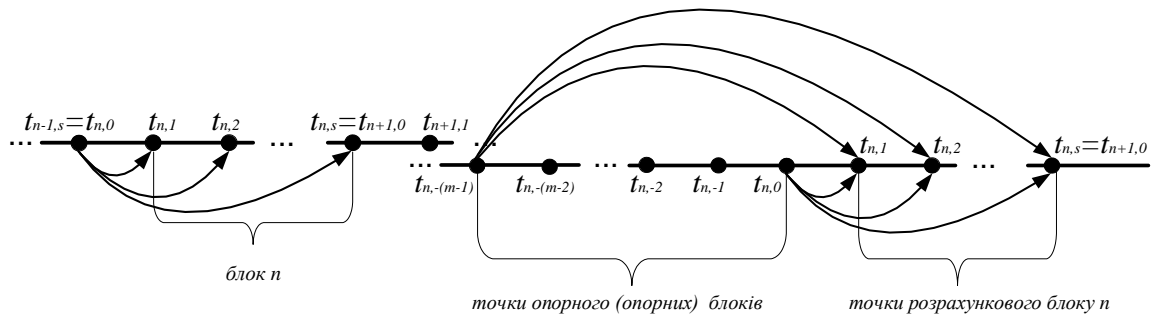


Рис. 1. Шаблон різницевої схеми однокрокового  $s$ -точкового блокового методу

Рис. 2. Шаблон різницевої схеми  $m$ -крокового  $s$ -точкового блокового методу

Для однокрокових методів різницевої рівняння мають вигляд

$$u_{n,i} = u_{n,0} + i\tau \left( d_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^s a_{i,j} F_{n,j} \right), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

де  $F_{n,j} = f(t_{n,0} + j\tau, u_{n,j})$ ,  $N$  – кількість розрахункових блоків,  $s$  – розмірність блоку (кількість розрахункових точок),  $d_i, a_{i,j}$  – коефіцієнти розрахункових схем,  $i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, s$ .

Співвідношення (2) визначають канонічне подання однокрокового  $s$ -точкового різницевого методу. Отримаємо коефіцієнти рівнянь, що дозволяють представляти загальні однокрокові багатоточкові методи канонічної формі. Кожне  $i$ -е різницеве рівняння (2) містить  $s+1$  невідомих коефіцієнтів. Для їх визначення слід скласти та розв'язати систему рівнянь відповідної розмірності, що забезпечує виконання умов апроксимації. Вирази для нев'язків на розв'язанні  $x(t)$  вихідного диференційного рівняння мають вигляд

$$r_{n,i} = -\frac{x_{n,i} - x_{n,0}}{i\tau} + d_i x'_{n,0} + \sum_{j=1}^s a_{i,j} x'_{n,j}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (3)$$

де  $x_{n,j} = x(t_{n,0} + j\tau)$ ,

$$x'_{n,j} = x'(t_{n,0} + j\tau) = f(t_{n,0} + j\tau),$$

Розкладаючи  $x(t_{n,0} + i\tau)$  і  $x'(t_{n,0} + j\tau)$  в ряди Тейлора в околі точки  $t_{n,0}$ , отримаємо

$$\frac{x_{n,i} - x_{n,0}}{i\tau} = \sum_{l=1}^p \frac{(i\tau)^{l-1}}{l!} x^{(l)}_{n,0} + O(\tau^p), \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$x'_{n,j} = \sum_{l=1}^p \frac{(j\tau)^{l-1}}{(l-1)!} x^{(l)}_{n,0} + O(\tau^p), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Повернемося тепер до виразу для нев'язка (3) і підставимо отримані співвідношення

$$r_{n,i} = - \sum_{l=1}^p \frac{(i\tau)^{l-1}}{l!} x^{(l)}_{n,0} + d_i x'_{n,0} + \sum_{j=1}^s a_{i,j} \sum_{l=1}^p \frac{(j\tau)^{l-1}}{(l-1)!} x^{(l)}_{n,0} + O(\tau^p),$$

$$i = 1, 2, \dots, s.$$

Після перетворень угруповання і зміни послідовності складання членів з похідними співпадаючих порядків, отримаємо

$$r_{n,i} = \left( d_i + \sum_{j=1}^s a_{i,j} - 1 \right) +$$

$$+ \sum_{l=2}^p \frac{\tau^{l-1}}{(l-1)!} x^{(l)}_{n,0} \left( \sum_{j=1}^s j^{l-1} a_{i,j} - \frac{i^{l-1}}{l} \right) + O(\tau^p), \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \dots, s.$$

З (4) витікає, що похибка апроксимації має порядок  $p$ , якщо виконано умови

$$d_i + \sum_{j=1}^s a_{i,j} = 1,$$

$$\sum_{j=1}^s j^{l-1} a_{i,j} = \frac{i^{l-1}}{l}, \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, s, \quad l = 2, \dots, p.$$

Система (5) для кожного фіксованого  $i$  містить  $p$  рівнянь і  $s + 1$  невідомих. Якщо висунути вимогу, щоб  $p = s + 1$ , тоді з (5) можна визначити всі невідомі коефіцієнти  $d_i$  і  $a_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, s$ , які надалі будемо вважати елементами вектору  $D$  і матриці  $A$  відповідно. Вимога співпадіння  $p = s + 1$  забезпечує відповідний порядок апроксимації однокрокового  $s$ -точкового блокового методу. Похибка методу у відповідності до (4) визначається як

$$r_{n,i} = \frac{\tau^{s+1}}{(s+1)!} x_{n,0}^{(s+2)} \left( \sum_{j=1}^s j^{s+1} a_{i,j} - \frac{i^{s+1}}{s+2} \right) + O(\tau^{s+2}), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (6)$$

Отже, найвищий порядок апроксимації однокрокових багатоточкових блокових різницевих методів дорівнює  $O(\tau^{s+1})$ .

### Композиція різницевих апроксимацій багатокрокових блокових методів

Різницеві рівняння багатокрокових багатоточкових методів на шаблоні (рис.2) з розрахунковим блоком, що містить  $s$  точок, і з опорним блоком, що містить  $m$  точок будуть мати вигляд

$$u_{n,i} = u_{n,0} + i\tau \left( \sum_{j=1}^m b_{i,j} F_{n,j-m} + \sum_{j=1}^s a_{i,j} F_{n,j} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, s,$$

$$n = 1, 2, \dots, N,$$
(7)

де позначення  $F_{n,j}, N, s, a_{i,j}$  співпадають з описами (2),

$m$  – розмірність опорного блоку (кількість опорних точок).

$b_{i,j}$  – коефіцієнти розрахункової схеми,  $i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, m$ .

Вирази для нев'язків початкової системи рівнянь (7) мають вигляд

$$r_{n,i} = -\frac{x_{n,i} - x_{n,0}}{i\tau} + \sum_{j=1}^m b_{i,j} x'_{n,j-m} +$$

$$+ \sum_{j=1}^s a_{i,j} x'_{n,j}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$n = 1, 2, \dots, N,$$
(8)

де  $x_{n,j}, x'_{n,j}$  – співпадають з описами (3),

$$x'_{n,j-m} = x'(t_{n,0} - j\tau) = f(t_{n,0} - j\tau).$$

Розкладаючи  $x(t_{n,0} + j\tau)$  і  $x'(t_{n,0} \pm j\tau)$  в ряди Тейлора в околі точки  $t_{n,0}$ , отримуємо

$$\frac{x_{n,i} - x_{n,0}}{i\tau} = \sum_{l=1}^p \frac{(j\tau)^{l-1}}{l!} x^{(l)}_{n,0} + O(\tau^p), \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

$$x'_{n,j-m} = \sum_{l=1}^p \frac{((j-m)\tau)^{l-1}}{(l-1)!} x^{(l)}_{n,0} + O(\tau^p), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$x'_{n,j} = \sum_{l=1}^p \frac{(j\tau)^{l-1}}{(l-1)!} x^{(l)}_{n,0} + O(\tau^p), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Після угруповання членів із співпадаючими похідними отримаємо оцінку для похибки апроксимації різницевого методу (7), що розглядається на розв'язанні рівняння (1)

$$r_{n,i} = x'_{n,0} \left( \sum_{j=1}^m b_{i,j} + \sum_{j=1}^s a_{i,j} - 1 \right) + \sum_{l=2}^p \frac{\tau^{l-1}}{(l-1)!} x^{(l)}_{n,0} \left( \sum_{j=1}^s a_{i,j} j^{l-1} + \sum_{j=1}^m b_{i,j} (j-m)^{l-1} - \frac{i^{l-1}}{l} \right) + O(\tau^p).$$

Похибка апроксимації має порядок  $p$ , якщо виконані наступні умови

$$\sum_{j=1}^m b_{i,j} + \sum_{j=1}^s a_{i,j} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^s j^{l-1} a_{i,j} + \sum_{j=1}^m (j-m)^{l-1} b_{i,j} = \frac{i^{l-1}}{l}, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad l = 2, \dots, p.$$

Система рівнянь (7) для кожного фіксованого  $i$  містить  $p$  рівнянь і  $m + s$  невідомих  $b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,m}, a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,s}$ . При  $p = m + s$  можна визначити всі невідомі коефіцієнти з системи. Отримані коефіцієнти дозволяють сформувати відповідні матриці  $A$  і  $B$ . Найвищий порядок апроксимації багатокрокового  $s$ -точкового блокового методу дорівнює  $m + s$ . Його похибка у відповідності до (8) визначається як

$$r_{n,i} = \frac{\tau^{s+m}}{(s+1)!} x_{n,0}^{(s+m+1)} \times \left( \sum_{j=1}^s j^{s+m} a_{i,j} + \sum_{j=1}^m (j-m)^{s+m} b_{i,j} - \frac{i^{s+m}}{s+m+1} \right) + O(\tau^{s+m+1}), \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, s,$$

отже, найвищий порядок апроксимації багатокрокових багатоточкових блокових різницевих методів дорівнює  $O(\tau^{s+m})$ .



### Дослідження стійкості одно- і багатокрокових блокових методів за початковими даними

Розглянутий в [16] інтегро-інтерполяційний підхід до формування розрахункових коефіцієнтів різницевих методів дозволяє отримати шукані значення з витриманням найвищого порядку апроксимації, тобто з порядком  $O(\tau^{s+1})$  для однокрокових схем і з порядком  $O(\tau^{s+m})$  для багатокрокових, де  $s$  і  $m$  кількість розрахункових та опорних точок відповідно. Разом з тим доведено [17], що однокрокові схеми найвищого порядку точності є абсолютно стійкими, в той час, як багатокрокові схеми найвищого порядку апроксимації непридатні для числових розрахунків, оскільки вони нестійкі. Отже, при формуванні розрахункових коефіцієнтів необхідно штучно знижувати порядок точності методу, щоб отримати абсолютно стійкі різницеві схеми. На жаль, інтегро-інтерполяційний підхід не припускає можливості штучного зниження порядку апроксимації, якщо розмірності опорного і розрахункового блоків зафіксовано, в той час, коли цього можна досягти, формуючи системи рівнянь на фіксованій множині точок з наперед заданим порядком точності методу, що менший за максимальний. Розглянемо деякі варіанти такого формування розрахункових схем, які, з одного боку мають достатньо високий порядок точності, а, з іншого боку, залишаються абсолютно стійкими як за початковими даними, так і за правою частиною.

Введемо нові позначення і запишемо рівняння (2) в векторній формі

$$U_{n+1} = S \cdot U_n + \tau(DF_n + AF_{n+1}), \quad (11)$$

де  $U_{n+1} = (u_{n,i}), i = 1, 2, \dots, s, n = 1, 2, \dots, N$  – вектор шуканих значень,

$U_n = (0, 0, \dots, 0, u_{n,0})$  – вектор з єдиним опорним значенням,

$D = (d_1, d_2, \dots, d_s)^T$  – вектор коефіцієнтів розрахункової схеми,

$F_n = f(t_n, u_{n,0})$  – значення правої частини в опорній точці,

$A = (a_{i,j})$  – матриця коефіцієнтів розрахункової схеми,

$i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, s.$

$F_{n+1} = (F_{n,j}), j = 1, 2, \dots, s$  – вектор значень правих частин в розрахункових точках.

Матриця  $S$ , що має вигляд

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

визначає стійкість метода (11) за початковими даними. Характеристичне рівняння матриці  $S$  має вигляд

$$\lambda^{s-1}(1 - \lambda) = 0,$$

корені цього рівняння  $\lambda_1 = 1, \lambda_i = 0, i = 2, 3, \dots, s$ , отже, умови Далквіста [8, 18] виконуються, і однокроковий багатоточковий метод є стійким за початковими даними.

Для багатокрокового багатоточкового методу у вигляді (7) подання (11) буде мати незначну відмінність

$$U_{n+1} = S \cdot U_n + \tau(BF_n + AF_{n+1}), \quad (13)$$

де всі попередні позначення залишаються такими ж, як і у поданні (11) за винятком наступних:

$F_n = f(t_n, u_{n,j}), j = 1 - m, 1 - (m - 1), \dots, 0$  – вектор значень правих частин в опорних точках,

$B = (b_{i,j})$  – матриця коефіцієнтів розрахункової схеми,

$$i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

### **Дослідження стійкості одно- і багатокрокових блокових методів за правою частиною**

Для дослідження стійкості різницевого методу за правою частиною використовується [8,18] модельне одновимірне рівняння виду

$$x'(t) = \lambda x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T], \quad (14)$$

де  $\lambda$  - комплексне число ( $\lambda < 0$ ). Метод вважається А-стійким, якщо границею області стійкості методу в комплексному просторі є уявна вісь, і  $A(\alpha)$  – стійким, якщо область його стійкості містить кут  $|\arg(-\mu)| < \alpha, \mu = \lambda\tau$  [8]. Однокрокові методи (11) на модельному рівнянні (14) з правими частинами  $F_{n,j} = f(t_{n,j}, u_{n,j}) = \lambda u_{n,j}$  після введення заміни  $\mu = \lambda\tau$ , можна подати у вигляді

$$U_{n+1} = GU_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

де  $G$  - матриця переходу виду

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_2 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_s \end{pmatrix},$$

з елементами, що визначаються як

$$G = (E - \mu A)^{-1} (S + E\mu D). \quad (16)$$

За елементами матриці переходу  $G$  (квадратна матриця розмірності  $s \times s$ ) визначається стійкість чисельного методу (11) за правою частиною.

Що стосується однокрокових методів, то в [17] доведено, що методи (11) з будь якою розмірністю розрахункового блоку є абсолютно стійкими. Отже, завдання генерування розрахункових коефіцієнтів  $d_i, a_{i,j}$  різницевих схем, що побудовано на однокрокових методах (2), можуть бути виконано як на основі інтегро-інтерполяційного методу [16], так і за допомогою побудови системи алгебраїчних рівнянь (5). Застосування обох підходів дозволяє побудувати різницеві схеми з максимально можливим порядком апроксимації, не порушуючи при цьому стійкість за правою частиною. Отримаємо, як для прикладу, розрахункові коефіцієнти однокрокових методів з розмірностями розрахункових блоків  $s = 3$  (17) і  $s = 4$  (18) відповідно, позначивши  $D = (d_1, d_2, \dots, d_s)^T$ :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{19}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Система різницевих рівнянь на отриманих коефіцієнтах матиме вигляд:

$$\begin{aligned} u_{n,1} &= u_{n,0} + \frac{1}{24}\tau(9F_{n,0} + 19F_{n,1} - 5F_{n,2} + F_{n,3}), \\ u_{n,2} &= u_{n,0} + \frac{1}{3}\tau(F_{n,0} + 4F_{n,1} + F_{n,2}), \\ u_{n,3} &= u_{n,0} + \frac{3}{8}\tau(F_{n,0} + 3F_{n,1} + 3F_{n,2} + F_{n,3}). \end{aligned} \quad (17)$$

Значення нев'язків на множині розрахункових точок  $s = 3$  оцінюються як

$$\begin{aligned} r_{n,1} &= \frac{19}{30}x^{(5)}[t_n]\tau^4 + O[\tau]^5, \\ r_{n,2} &= -\frac{1}{30}x^{(5)}[t_n]\tau^4 + O[\tau]^5, \\ r_{n,3} &= \frac{1}{10}x^{(5)}[t_n]\tau^4 + O[\tau]^5, \end{aligned}$$

що підтверджує обґрунтований порядок точності розрахункової схеми  $O(\tau^{s+1}) = O(\tau^4)$ .

Оцінимо стійкість однокрокового триточкового методу (17), для чого сформуємо матрицю переходу

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-12 + 6\mu + \mu^2 - \mu^3}{-12 + 18\mu - 11\mu^2 + 3\mu^3} \\ 0 & 0 & \frac{-12 - 6\mu + \mu^2 + \mu^3}{-12 + 18\mu - 11\mu^2 + 3\mu^3} \\ 0 & 0 & \frac{12 + 18\mu + 11\mu^2 + 3\mu^3}{-12 + 18\mu - 11\mu^2 + 3\mu^3} \end{pmatrix},$$

і побудуємо області, які обмежуються елементами матриці  $G$  і відповідають кожній точці розрахункового блоку (рис. 3). Всі точки розрахункового блоку в якості області стійкості мають всю ліву напівплощину, що свідчить про абсолютну стійкість схеми (17).

Розрахункові коефіцієнти для однокрокової схеми з  $s = 4$  мають вигляд (18), при цьому слід зауважити, що і інтегро-інтерполяційний підход [16], і підхід, що базується на співвіднесеннях розкладань в ряди Тейлора (5) для заданої розмірності блоку надали співпадаючі результати.

$$D = \begin{pmatrix} \frac{251}{720} \\ \frac{29}{90} \\ \frac{180}{9} \\ \frac{80}{7} \\ \frac{80}{90} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{323}{360} & -\frac{11}{30} & \frac{53}{360} & -\frac{19}{720} \\ \frac{31}{45} & \frac{2}{15} & \frac{1}{45} & -\frac{1}{180} \\ \frac{17}{40} & \frac{3}{10} & \frac{7}{40} & -\frac{1}{80} \\ \frac{16}{45} & \frac{2}{15} & \frac{16}{45} & \frac{7}{90} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Збільшення кількості розрахункових точок ( $s = 4$ ) дозволило підвищити порядок апроксимації  $O(\tau^{s+1}) = O(\tau^5)$ , нев'язки схеми з коефіцієнтами (18) для кожної точки блоку дорівнюють:

$$r_{n,1} = -\frac{27}{2} x^{(6)}[t_n] \tau^5 + O[\tau]^6,$$

$$r_{n,2} = -x^{(6)}[t_n] \tau^5 + O[\tau]^6,$$

$$r_{n,3} = -\frac{1}{2} x^{(6)}[t_n] \tau^5 + O[\tau]^6,$$

$$r_{n,4} = O[\tau]^6.$$

Матриця переходу для розрахункової схеми (18) має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{60 - 60\mu + 15\mu^2 + 5\mu^3 - 3\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{60 - 15\mu^2 + 2\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{60 + 60\mu + 15\mu^2 - 5\mu^3 - 3\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{60 + 120\mu + 105\mu^2 + 50\mu^3 + 12\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4} \end{pmatrix},$$

а границі областей стійкості (рис. 4), які визначаються елементами матриці  $G$  і відповідають кожній точці розрахункового блоку в (18), також в якості області стійкості мають всю ліву напівплощину. Отже, годографи (рис. 3, 4), які визначають границі стійкості однокрокових методів максимального порядку точності для кожної розрахункової точки у блоці відповідної розмірності демонструють абсолютну стійкість (А-стійкість) однокрокових методів. Ця властивість методів зберігається для будь-якої розмірності блоку.

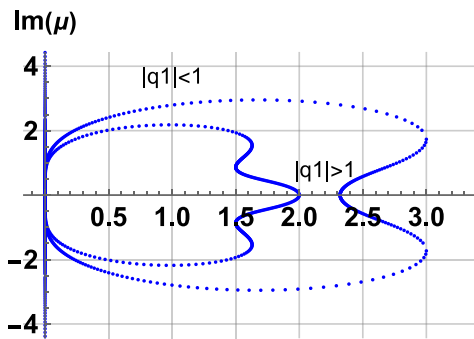


Рис. 3. Годографи стійкості однокрокового методу,  $s = 3$

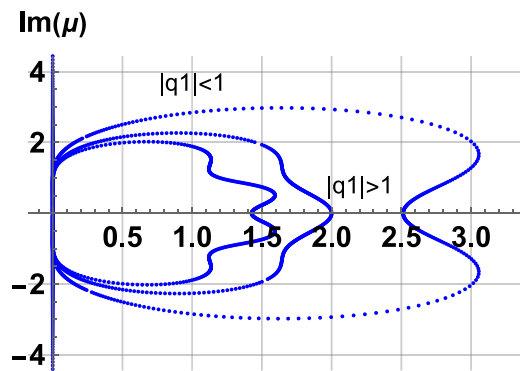


Рис. 4. Годографи стійкості однокрокового методу,  $s = 4$

А-стійкий метод є абсолютно стійким при будь-яких значеннях кроку інтегрування  $\tau$ , за умови стійкості розв'язання початкового диференційного рівняння (системи рівнянь) [8, 18]. На жаль, такої особливості позбавлені багатокрокові методи максимального порядку апроксимації. Для перевірки стійкості багатокрокового методу за правою частиною слід побудувати матрицю переходу, вигляд якої суттєво залежить від співвідношення кількості опорних і розрахункових точок у блоках. Модельне рівняння, застосоване для багатокрокового методу (13), можна

привести до вигляду (15), але елементи матриці переходу будуть визначатися як

$$G = (E - \mu A)^{-1} (S + \mu B). \quad (19)$$

Матриця переходу формується у вигляді (20), якщо розмірності блоків співпадають ( $s = m$ )

$$G = \begin{pmatrix} g_{1,1} & \dots & g_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{s,1} & \dots & g_{s,m} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

У разі, коли кількість розрахункових точок перевищує кількість опорних ( $m < s$ ), перші  $s - m$  стовбчиків у матриці переходу  $G$  будуть містити лише нульові елементи

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & g_{1,1} & g_{1,2} & \dots & g_{1,m} \\ 0 & \dots & 0 & g_{2,1} & g_{2,2} & \dots & g_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g_{s,1} & g_{s,2} & \dots & g_{s,m} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

У разі, коли кількість розрахункових точок менша за кількість опорних ( $m > s$ ), матрицю переходу  $G$  слід привести до вигляду

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ q_{1,1} & q_{1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & q_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ q_{s,1} & q_{s,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & q_{s,m} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Для забезпечення абсолютної стійкості (A) або стійкості  $A - \alpha$  багатокрокових методів (7) необхідно знизити порядок точності зі збереженням всієї множини опорних і розрахункових точок. Але такої можливості інтегро-інтерполяційний підхід до формування різницевих схем позбавлений, отже, для штучного зниження порядку у програмний код генерування розрахункових коефіцієнтів слід внести деякі зміни, пов'язані з до визначенням множини коефіцієнтів. Розглянемо множину багатокрокових методів  $s = 3, m = 3$  (23 – 24),  $s = 3, m = 2$  (25),  $s = 2, m = 3$  (26), з тим, щоб врахувати всі можливі випадки співвідношення кількості розрахункових і опорних точок (співпадіння розмірності опорного і розрахункового блоків, опорних точок менше, опорних точок більше). Для кожного випадку сформуємо різницеві схеми, визначимо порядки апроксимації, перевіримо виконання умови стійкості і,

в разі її порушення, скоригуємо розрахункову схему, знизивши порядок апроксимації і залишаючи незмінними розмірності блоків.

Для випадку  $s = 3, m = 3$  коефіцієнти розрахункової схеми, що забезпечують найвищий порядок апроксимації, набудуть вигляду

$$B = \begin{pmatrix} \frac{11}{1440} & -\frac{31}{480} & \frac{401}{720} \\ \square & 0 & -\frac{1}{90} \\ \frac{3}{160} & -\frac{21}{160} & \frac{57}{80} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{401}{720} & -\frac{31}{480} & \frac{11}{1440} \\ \frac{19}{15} & \frac{17}{45} & -\frac{1}{90} \\ \frac{57}{80} & \frac{219}{160} & \frac{51}{160} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Ці коефіцієнти повністю співпадають з тими, що було отримано для таких же розмірностей блоків за допомогою інтегро-інтерполяційного підходу.

Максимальний нев'язок схеми з коефіцієнтами (23) на множині розрахункових точок у блоці складає

$$r_{n,1} = \frac{191}{42} x^{(7)}[t_n] \tau^6 + O[\tau]^7,$$

$$r_{n,2} = \frac{5}{42} x^{(7)}[t_n] \tau^6 + O[\tau]^7,$$

$$r_{n,3} = \frac{29}{42} x^{(7)}[t_n] \tau^6 + O[\tau]^7.$$

Разом з тим матриця переходу (дод. А, А.1) та годограф різницевої схеми (23) (рис. 5) характеризують побудований метод як такий, що не забезпечує А або А –  $\alpha$ -стійкість. Спробуємо поступитися порядком апроксимації, знизивши його на одиницю, але при цьому залишивши незмінними розмірності розрахункового і опорного блоків. Для цього слід обрати і штучно довизначити шукану множину коефіцієнтів, наприклад  $a_{1,0} = 0, a_{2,0} = 0, a_{3,0} = 0$ . З урахуванням штучного довизначення для випадку  $s = 3, m = 3$  коефіцієнти розрахункової схеми набудуть вигляду

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{173}{3600} & \frac{77}{360} & 0 \\ \square & -\frac{17}{900} & \frac{4}{45} \\ -\frac{7}{400} & \frac{3}{40} & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{401}{360} & -\frac{247}{720} & \frac{19}{300} \\ \frac{37}{45} & \frac{17}{180} & \frac{1}{75} \\ \frac{19}{40} & \frac{27}{80} & \frac{13}{100} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

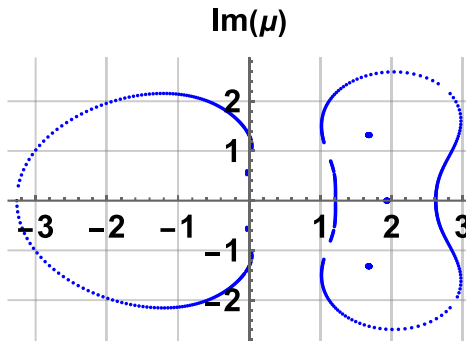


Рис. 5. Годографи стійкості багатокрокового методу,  $s = 3, m = 3$  з найвищим порядком апроксимації  $O(\tau^{s+m}) = O(\tau^6)$

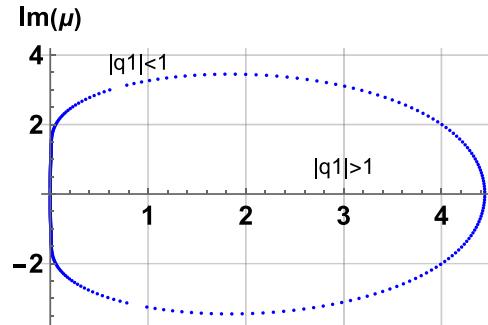


Рис. 6. Годографи стійкості багатокрокового методу,  $s = 3, m = 3$  з порядком апроксимації  $O(\tau^{s+m-1}) = O(\tau^5)$

У такий спосіб змінюючи розмірності опорного та/або розрахункового блоків можна побудувати А або А –  $\alpha$ -стійкі різницеві схеми заданого порядку апроксимації. Різницева схема з коефіцієнтами (24) на множині розрахункових точок у блоці забезпечує порядок апроксимації  $O(\tau^{s+m-1}) = O(\tau^5)$

$$r_{n,1} = \frac{401x^{(6)}[t_n]\tau^5}{7200} + O[\tau]^6,$$

$$r_{n,2} = \frac{17}{900}x^{(6)}[t_n]\tau^5 + O[\tau]^6,$$

$$r_{n,3} = \frac{19}{800}x^{(6)}[t_n]\tau^5 + O[\tau]^6,$$

що на одиницю менший максимально можливого. Разом з тим метод з коефіцієнтами (24) є абсолютно стійким (див. рис. 6). Для випадку ( $m < s, m = 2, s = 3$ ) сформовано різницеві схеми найвищого порядку апроксимації  $s + m = 5$  і зі зменшенням порядку апроксимації на одиницю  $s + m - 1 = 4$  (25). Годографи, що відповідають таким схемам, наведено на рис. 7 – 10 і відповідні матриці переходів (А.3 – А.6) ілюструють твердження про вплив зменшення порядку апроксимації на стійкість різницевої схеми.

$$u_{n,1} = u_{n,0} + \tau \left( \frac{3}{32}F_{n,-1} + \frac{65}{48}F_{n,1} - \frac{7}{12}F_{n,2} + \frac{13}{96}F_{n,3} \right), \quad (25)$$



$$u_{n,2} = u_{n,0} + 2\tau \left( \frac{1}{24} F_{n,-1} + \frac{11}{12} F_{n,1} + \frac{1}{24} F_{n,3} \right),$$

$$u_{n,3} = u_{n,0} + 3\tau \left( \frac{1}{32} F_{n,-1} + \frac{9}{16} F_{n,1} + \frac{1}{4} F_{n,2} + \frac{5}{32} F_{n,3} \right).$$

Порядок апроксимації різницевих схем (25-26) на множині розрахункових точок у блоці забезпечується на рівні  $O(\tau^{s+m-1}) = O(\tau^4)$ , в той час, коли максимальне значення порядку для таких співвідношень опорних і розрахункових блоків могло б складати  $O(\tau^5)$ , але схеми з максимальним порядком, на жаль, унеможливають стійкість розрахунків.

$$u_{n,1} = u_{n,0} + \tau \times \left( -\frac{13}{144} F_{n,-2} + \frac{23}{72} F_{n,-1} + \frac{65}{72} F_{n,1} - \frac{19}{144} F_{n,2} \right) \quad (26)$$

$$u_{n,2} = u_{n,0} + 2\tau \left( -\frac{1}{36} F_{n,-2} + \frac{1}{9} F_{n,-1} + \frac{7}{9} F_{n,1} + \frac{5}{36} F_{n,2} \right).$$

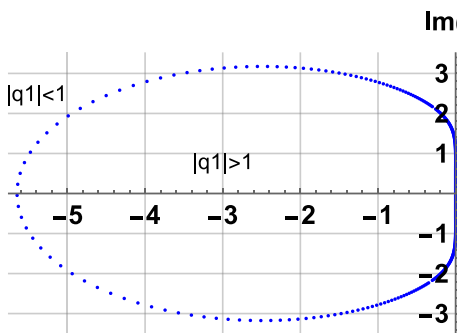


Рис. 7. Годографи стійкості багатокрокового методу,  $s = 3, m = 2$  з найвищим порядком апроксимації  $O(\tau^{s+m}) = O(\tau^5)$

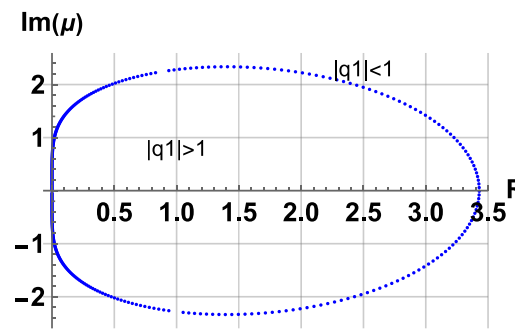


Рис. 8. Годографи стійкості багатокрокового методу,  $s = 3, m = 2$  з порядком апроксимації  $O(\tau^{s+m-1}) = O(\tau^4)$

На рис. 9 – 10 наведено годографи багатокрокових методів із різними співвідношеннями розмірностей опорних і розрахункових блоків, а у додатку А – матриці переходів, що відповідають різницевим схемам (23) – (26) з максимальним і скороченим порядками апроксимації. Показано, що скорочення максимально можливого порядку точності приводить до отримання стійких різницевих схем.

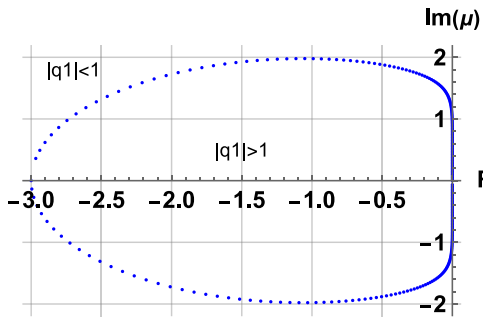


Рис. 9. Годографи стійкості багатокрокового методу,  $s = 2, m = 3$  з найвищим порядком апроксимації  $O(\tau^{s+m}) = O(\tau^5)$

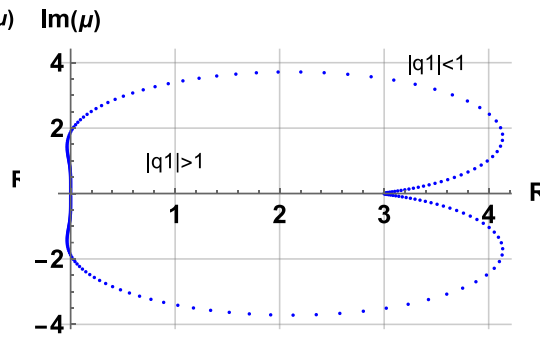


Рис. 10. Годографи стійкості багатокрокового методу,  $s = 2, m = 3$  з порядком апроксимації  $O(\tau^{s+m-1}) = O(\tau^4)$

Визначення коефіцієнтів розрахункових схем, оцінювання порядків апроксимації та дослідження стійкості дозволяє провести розроблена програмна система.

**Висновки.** У роботі досліджено питання формування одно- і багатокрокових різницевих схем заданого порядку точності чисельного розв'язання завдання Коші як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для рівнянь з частинними похідними, які було зведено до розв'язання ЗДР, наприклад, методом прямих. Різницеві схеми, що пропонуються, орієнтовані на застосування, в тому числі, в паралельних обчислювальних системах і забезпечують можливість одночасного визначення значень у множині розрахункових точок блоку за умови наявності достатньої кількості процесорів. Побудова дискретних апроксимацій здійснюється через обмеження оцінки для похибки апроксимації різницевого методу з урахуванням розмірностей розрахункового та/або опорного блоків. Застосований підхід, що базується на співвіднесенні розкладань у ряди Тейлора точних та наближених розв'язань, дозволяє варіювати порядок похибки, відходячи від максимально можливого на фіксованій множині вузлів, але забезпечуючи при цьому абсолютну або А-а стійкість чисельних розв'язань. Показано, що однокрокові схеми максимального порядку апроксимації залишаються абсолютно стійкими при збільшенні розмірності розрахункових блоків. Виконання умови абсолютної або А-а стійкості для багатокрокових методів забезпечується шляхом скорочення максимально можливого порядку апроксимації.

В якості **наукової новизни** цієї роботи слід визначити запропоновані підходи до побудови методів композиції різницевих апроксимацій, що

забезпечують заданий порядок апроксимації при чисельному розв'язанні завдання Коші як для звичайних диференційних рівнянь, так і для еволюційних рівнянь з частинними похідними. Дослідження властивостей запропонованих матриць переходів, що пов'язують опорні і розрахункові точки, дозволяють визначити характер стійкості сформованих різницевих схем за початковими даними і за правими частинами.

**Практична цінність** роботи полягає у створенні програмної системи, яка дозволяє формувати різницеві співвідношення для заданих розмірностей блоків, визначати порядки апроксимації у розрахункових точках, оцінювати стійкість отриманих схем. Автоматичне генерування стійких різницевих схем дозволяє враховувати топологію наявного процесорного поля, отже, з максимальною ефективністю використовувати наявний обчислювальний ресурс.

**Список літератури:**

1. *Zhu Q.* Complex Dynamic System Modelling, Identification and Control / *Zhu Q., G. Fusco, J. Na* // Entropy. – 2022, Vol. 24(3). – P. 380-389.
2. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference Schemes/ *A.A. Samarskii.* – 2001, Boca Raton: CRC Press, 786 p. <https://doi.org/10.1201/9780203908518>
3. *Butcher J. C.* Numerical Methods for Ordinary Differential Equations / *J.C. Butcher.* – 2016, John Wiley & Sons. – 544 p. <https://doi.org/10.1002/9781119121534.fmatter>
4. *Dongarra J.* The Design and Performance of Batched BLAS on Modern High-Performance Computing Systems / *J. Dongarra, S. Hammarling, N. Higham* // International Conference on Computational Science. – 2017. – P. 495–504
5. *Дмитрієва О.А.* Моделювання жорстких систем на основі колокаційних схем розтягування – стиснення / *О.А. Дмитрієва, Н.Г. Гуськова* // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. – 2017, № 1(24). – С. 76-84.
6. *Bashkov Y.* Parallel multiple blocked methods of Bickart type / *Y. Bashkov, O. Dmitrieva, N. Huskova* // Proceedings of SPIE. Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments. – 2019, Vol. 11176 (1), <https://doi.org/10.1117/12.2536798>
7. *Bashkov Y.* Parallel implementation of evolutionary partial differential equations by collocation optical-electronic schemes / *Y. Bashkov, O. Dmitrieva, N. Huskova* // Proceedings of SPIE. Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments. – 2022, Vol. 12476 (1), <https://doi.org/10.1117/12.2664488>
8. *Самарский А.А.* Чисельні методи / *А.А. Самарский, А.В. Гулін.* – Наука. Гол. ред. фіз-мат. літ. – 1989. – 432 с.
9. *Mohammad T.* The stability and convergence of time-stepping/spectral methods with asymptotic behaviour for the Rosenau–Burgers equation / *T. Mohammad, X. Chuanju* // Applicable Analysis. – 2022, Vol. 99 (12), P. 2013-2025, <https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1553034>
10. *Zlotnik A.* Spectral Stability Conditions for an Explicit Three-Level Finite-Difference Scheme for a Multidimensional Transport Equation with Perturbations / *A. Zlotnik, B. Chetverushkin* // Differential Equations. – 2021, Vol. 57, P. 891-900, <https://doi.org/10.1134/S0012266121070065>

11. Ma Y. Spectral Method for the Generalized Time Fractional Cable Equation / Y. Ma, L. Chen // *Fractal Fractional*. – 2022, Vol. 6(439), <https://doi.org/10.3390/fractalfract6080439>
12. Jameson A. A Proof of the Stability of the Spectral Difference Method for All Orders of Accuracy/ A. Jameson // *Journal of Scientific Computing*. – 2010, Vol. 5 (1–3). – P. 348-358 <https://doi.org/10.1007/s10915-009-9339-4>
13. Fadugba S. Stability analysis of a proposed scheme of order five for first order ordinary differential equations / S. Fadugba, B. Ogunrinde, R. Ogunrinde // *Malaysian journal of computing*. – 2021, Vol. 6(2), <https://doi.org/10.24191/mjoc.v6i2.9756>
14. Lee E. Stability analysis of the implicit finite difference schemes for nonlinear Schrödinger equation / E. Lee, D. Kim/ *AIMS Mathematics*. – 2022, Vol. 7(9). – P. 16349-16365, <https://doi.org/10.3934/math.2022893>
15. Fakharany M. Numerical analysis of finite difference schemes arising from time-memory partial integro-differential equations / M. Fakharany, M. El-Borai, I. Abu // *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*. – 2022, Vol. 8 (1055071), <https://doi.org/10.3389/fams.2022.1055071>.
16. Дмитрієва О.А. Генерування паралельних колокаційних різницевих схем з використанням інтегро-інтерполяційного підходу / О.А. Дмитрієва, В.Г. Гуськова // *Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання*. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2022. – Том 1, № 1-2 (7-8). – С. 95–108, <https://doi.org/10.20998/2411-0558.2022.02.09>
17. Фельдман Л. Розробка і дослідження паралельних колокаційних блокових методів / Л. Фельдман, О. Дмитрієва // *Наукові праці ДонНТУ. Серія "Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка"*. – 2012, № 16 (204). – С. 28-35.
18. Hairer E. Gerhard Wanner Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems/ E. Hairer, G. Wanner. – Berlin: Springer Verlag, 2004. – 614 p.

#### **References:**

1. Zhu, Q., Fusco, G. and Na, J., (2022). "Complex Dynamic System Modelling, Identification and Control", *Entropy*, Vol. 24(3), pp. 380-389.
2. Samarskii, A., (2001). "The Theory of Difference Schemes", available at: <https://doi.org/10.1201/9780203908518>
3. Butcher, J., (2016). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, 544 p.
4. Dongarra, J., Hammarling, S. and Higham, N., (2017). "The Design and Performance of Batched BLAS on Modern High-Performance Computing Systems", *International Conference on Computational Science*, pp. 495–504.
5. Dmitrieva, O. and Huskova, N., (2017). "Simulation of stiff systems based on collocation schemes of tension – compression", *Science practices of Donetsk National Technical University*, Vol. 1(24), pp. 76-84.
6. Bashkov, Y., Dmitrieva, O. and Huskova, N., (2019). "Parallel multiple blocked methods of Bickart type", *Proceedings of SPI. Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments*, Vol. 11176(1), available at: <https://doi.org/10.1117/12.2536798>
7. Bashkov, Y., Dmitrieva, O. and Huskova, N., (2022). "Parallel implementation of evolutionary partial differential equations by collocation optical-electronic schemes", *Proceedings of SPI. Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments*, Vol. , 12476(1), available at: <https://doi.org/10.1117/12.2664488>
8. Samarskii, A. and Gulin, A., (1989). *Numerical method*, Nauka, 432 p.

9. Mohammad, T. and Chuanju, X., (2020). "The stability and convergence of time-stepping / spectral methods with asymptotic behaviour for the Rosenau–Burgers equation", *Applicable Analysis*, Vol. 99(12), pp. 2013-2025, available at: <https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1553034>
10. Zlotnik, A. and Chetverushkin, B., (2021). "Spectral Stability Conditions for an Explicit Three-Level Finite-Difference Scheme for a Multidimensional Transport Equation with Perturbations", *Diff. Equat.*, Vol. 57, pp. 891–900, available at: <https://doi.org/10.1134/S0012266121070065>
11. Ma, Y. and Chen, L., (2022). "Spectral Method for the Generalized Time Fractional Cable Equation", *Fractal Fractional*, Vol. 6(439). available at: <https://doi.org/10.3390/fractalfract6080439>
12. Jameson, A., (2010). "A Proof of the Stability of the Spectral Difference Method for All Orders of Accuracy", *Journal of Scientific Computing*, Vol. 45, pp. 348-358, available at: <https://doi.org/10.1007/s10915-009-9339-4>
13. Fadugba, S., Ogunrinde, B. and Ogunrinde, R., (2021). "Stability analysis of a proposed scheme of order five for first order ordinary differential equations", *Malaysian journal of computing*, Vol. 6(2), available at: <https://doi.org/10.24191/mjoc.v6i2.9756>
14. Lee, E. and Kim, D., (2022). "Stability analysis of the implicit finite difference schemes for nonlinear Schrödinger equation", *AIMS Mathematics*, Vol. 7 (9), pp. 16349-16365, available at: <https://doi.org/10.3934/math.2022893>
15. Fakharany, M., El-Borai, M. and Abu I., (2022). "Numerical analysis of finite difference schemes arising from time-memory partial integro-differential equations", *Front. Appl. Math. Stat.*, Vol. 8, available at: <https://doi.org/10.3389/fams.2022.1055071>
16. Dmitrieva, O. and Huskova, V., (2022). "Generation of parallel collocation difference schemes using the integro-interpolation approach", *Information Science and Modelling*, Vol. 1, pp. 95 –108, available at: <https://doi.org/10.20998/2411-0558.2022.02.09>
17. Feldman, L., Dmitrieva, O. (2012). "Development and research of parallel collocation block methods", *Science practices of Donetsk National Technical University*, Vol. 16(204), P. 28-35.
18. Hairer, E. and Wanner, G., (2004). *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer Verlag, Berlin, 614 p.

*Статтю представив доктор технічних наук, професор Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут" Сергій Леонов*

*Надійшла (received) 09.08.2023*

Dmytriyeva Olga<sup>1,2</sup>, Dr.Sci.Tech, Professor

<sup>1</sup>National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", av. Beresteyska, 37, Kyiv, Ukraine, 03056

<sup>2</sup>Institute for modelling hydraulic and environmental systems, University of Stuttgart, Pfaffenwaldring 5a, Stuttgart, Germany, 70569

Tel.: +49 (160) 598-72-88, e-mail: [olga.dmytriyeva@iws.uni-stuttgart.de](mailto:olga.dmytriyeva@iws.uni-stuttgart.de)

ORCID ID: 0000-0001-8921-8433

УДК 004.272.2:519.63

**Методи композиції різницевої апроксимації при моделюванні динамічних процесів / Дмитрієва О.А.** // Вісник НТУ "ХПІ". Серія: Інформатика та моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2023. – № 1–2 (9–10). – С. 5 – 26.

У роботі досліджено методи композиції різницевої апроксимації для формування одно- і багатокрокових паралельних різницевої схем заданого порядку, орієнтованих на чисельний розв'язок завдання Коші як для звичайних диференціальних рівнянь, так і для еволюційних рівнянь з частинними похідними. Пропоновані дискретні апроксимації дозволяють варіювати порядок похибки, відходячи від максимально можливого на фіксованій множині вузлів, але забезпечуючи при цьому абсолютну або  $A$ - $\alpha$  стійкість чисельних розв'язань. Дослідження властивостей запропонованих матриць переходів, що пов'язують опорні і розрахункові точки, дозволяють визначити характер стійкості сформованих різницевої схем за початковими даними і за правими частинами. Автоматичне генерування стійких різницевої схем дозволяє враховувати топологію процесорного поля, отже, з максимальною ефективністю використовувати наявний обчислювальний ресурс. Іл.: 10. Бібліогр.: 18 назв.

**Ключові слова:** різницевої апроксимації; моделювання динамічних процесів; завдання Коші; блокові методи; порядок похибки; абсолютна стійкість;  $A$ - $\alpha$  стійкість.

UDC 004.272.2:519.63

**Methods of composition of different approximations in the simulation of dynamic processes / Dmytriyeva O.** // Herald of the National Technical University "KhPI". Series of "Informatics and Modeling". – Kharkov: NTU "KhPI". – 2023. – № 1 – 2 (9 – 10). – P. 5 – 26.

The paper investigates methods of composing difference approximations for forming single- and multi-step parallel difference schemes of a given order, oriented to the numerical solution of the Cauchy problem for both ordinary differential equations and evolutionary partial differential equations. The proposed discrete approximations allow us to vary the order of the error, departing from the maximum possible on a fixed set of nodes, but ensuring absolute or  $A$ - $\alpha$  stability of numerical solutions. The study of the properties of the proposed transition matrices connecting the reference and design points allows us to determine the nature of the stability of the generated difference schemes according to the initial data and the right-hand sides. Automatic generation of stable difference schemes allows taking into account the topology of the processor field, and thus, using the available computing resource with maximum efficiency. Figs.: 10. Refs.: 18 titles.

**Keywords:** difference approximations; modeling of dynamic processes; Cauchy problem; block methods; error order; absolute stability;  $A$ - $\alpha$  stability.